现代应用数学丛书

代数学

〔日〕弥永昌吉　杉浦光夫　著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

代 数 学

〔日〕彌永昌吉 杉浦光夫 著
熊 全 淹 譯



上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分三章，包括綫性代数，群論基础、Boole 代数、有限体理論初步和有限群表現論。最后，为便于讀者对有限群表現論的了解，另节譯了 H. Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppen theorie 一书中"有限旋轉群"部分作为附录。本书可供高等院校数学系、物理系师生作参考。

現代应用数学丛书

代 数 学

原书名 代 数 学

原著者 〔日〕彌永昌吉 杉浦光夫

原出版者 岩波书店 1957

譯 者 熊 全 淹

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业许可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 9 16/32 字数 225,000

1962 年11月第1版 1962 年11月第1次印刷

印数 1—5,500

統一书号：13119・484

定 价：(十四) 1.60 元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要内容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·測度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程	福原滿洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程	福田武雄	穆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用	山内恭彦等	張质賢
結晶統計与代数	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王卣瀛
数値計算法	森口繁一等	閻昌龄
量子力学中的数学方法*	胡永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論	山本善之	刘亦珩
变形几何学*	近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津文一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	陆志剛
自动控制論	喜安善市等	翟立林
回路拓扑学	近藤一夫	張鳴鏞
信息論	喜安善市等	李文清
推断統計理論	北川敏男	李賢平
統計分析*	森口繁一	刘璋温
实驗設計	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論	官澤光一	張驌春
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已在1962年7月以前出版。

譯 者 序

本书共三章，所叙述的都是代数中主要的并且是应用广泛的部分，重点在第3章，而以第1章及第2章中的群为其基础。当然第1章綫性代数也是应用极为广泛的。

本书篇幅虽然不多，但内容丰富，由于取材适宜，安排恰当，所以重点突出，有条不紊。全书立足点高，抽象性强，論証严，对基本概念的闡述和重要定理的証明力求詳尽，有些較复杂的对应关系则另用图式說明，使讀者易于理解。有些重要定理及公式在文中順便引出而不另加証明，使在不模糊重点之下，又便于讀者得窥全貌，这些都是本书之长。此外，例题丰富更为他书所不及，很多重要性质是通过例題来給出，主要演算亦借例題来說明，其重要不在系及命題之下，讀者不可輕易放过。遺憾的是例題中的推导和演算有时过于簡略，初讀者不容易理解。尽管如此，本书的确是一本好书，尤其对应用数学者不可多得，是值得介紹。

第1章綫性代数，先述向量空間的基本概念及主要性质，次述 Jordan 标准形，最后叙述二次形式及 Hermite 形式，举凡綫性代数方面的主要理論及基本演算方法大部均已具备。全部理論建立在映射这个概念之上，其中一再引用到 § 8 的用矩陣表現映射的結果，希望讀者注意。第2章介紹群，Boole 代数，有限体，簡单明了，似都容易領会，不必再加解說。茲仅就本书主要部分第3章有限群的表現論，詳細說明如下。

在 § 25, 26, 27, 28 等节中讲述群表現，表現空間，不变子空間，可約及既約表現等基本概念以及在群表現論中起重要作用的基本定理：Schur 引理，并証明了在具有內积的向量空間中有限

群的任意表現是完全可約的。

在 § 29, 30 中給出群代数的定义，由它得到有限群的具体表現，即正則表現与伴随表現。

在 § 31 中，首先引用 Schur 引理推出既約表現的矩陣元素間的直交关系，由此导出 Burnside 定理，然后在 § 32 中引入群的特征标概念，利用特征标的性质判别两个表現是否等价。在 § 33 中討論了群代数的构造問題，利用特征标的直交关系指出有限群的既約表現都在正則表現中出現。証明了群代数与矩陣环的直和同构，引入群代数的中心与类函数的概念，因而推得了群的既約表現（不等价的）的个数等于群的共軛类的个数，最后給出了計算 3, 4 阶对称群特征标的实际例子。

§ 34 中讲述群的直积表現，特别討論了有限可換群的直积分解及可換群与其特征标群的同构。§ 35 叙述由子群的表現构造群的表現的方法，誘导表現即是由一个群的子群的已知表現誘导出这个群的表現，并討論了关于誘导表現的 Frobenius 的相互律。

§ 36 进一步討論群特征标的性质，并引用代数整数論的知識与特征标的直交关系証明了既約表現的級数是群的阶数的約数，并給出类函数成为单純特征标的必要充分条件。

§ 37 継續討論群代数的构造，引入两側理想，最小左(右)理想，冪等元与既約冪等元等概念，指出既約冪等元，最小左(右)理想与既約表現的关系，給出两个既約冪等元等价的必要充分条件。最后証明群代数的理想的直和分解。

在 § 38, 39, 40, 41 等节中，詳細討論了对称群的表現理論。首先引入 Young 台及它的 Young 对称子，指出了对称子是既約冪等元，以及两个对称子等价的必要充分条件是它們同在一个 Young 的台中，以后又引入标准台的概念，由此証明对称群的阶数是既約表現（不等价的）級数的平方和，并举出了构造对称群表

現的實际方法。

§42, 43两节介紹 Weyl 关于 n 阶对称群 G 与 m 維向量空間 V 上一般綫性变換群 $GL(V)$ 在直积空間 V^n 中的 n 級直积表現关系，指出直接表現是完全可約的，并且它所含的既約表現(不等价的)与行数小于或等于 m 的 Young 的台一一对应，其中每个既約表現的重复度等于上述所对应的 Young 的台的标准台的个数。

这章内容已如上述。整个理論的建立是以群代数为基础，并將群代数看成为群上的函数环（即定义域是群的一切函数所构成的环），从而导出了群的正則表現，以及把表現矩陣中的元素看成为群上函数而导出了 Burnside 定理，視特征标为类函数而建立起特征标的理論等等。在对称群的表現理論与 Weyl 理論的討論中也无时不引用群代数。因此，除§25, 26, 27 中所述的一些基本概念之外，§29, 33, 37 等节中有关群代数的定义和定理的部分都是相当重要的，因为这些概念和理論不仅是有限群表現論的基础，并且在无限群的表現論中也有重要意义。

特别是对于对称群的表現論，这章取材丰富，叙述詳尽，在現行的群表現論书籍中还不多見。

最后，由于一般綫性变換群含有直交变換群，酉变換群等其他特殊綫性变換群，因此它的直积表現論，在群的理論研究中非常重要。另一方面，这个理論在量子力学的多粒子問題中也有重要应用，后面介紹了 Weyl 在这方面的成果。Weyl 的原著(Classical group)叙述得不够清楚，艰涩难讀，經过本书整理，特別是在群代数的观点下来詳細論証，就比原著清楚易讀了。这对需要这方面理論的讀者将是有益的。

在本书翻譯过程中，就譯者认为較难理解的地方作了一些注解，希望能对初讀者有所帮助。但由于水平所限，挂一漏万以及錯

誤之处在所难免，請讀者批評指正。譯稿承管紀文同志，曹和貴同志校閱，提出了很多宝貴意見，此外曹和貴同志又添补了很多注解（特別在第3章），謹此一一致謝。

熊全淹 1961年9月

目　录

第1章 綫性代数

§1 向量及綫性运算

代数学与拓扑学在今天同是数学中龐大的基础部門之一。本书是"現代应用数学"中作为基础的代数学，以量子力学中所需用的"群表現論"为目标。对于作为数学而展开的代数学的各个部門自然不能广泛地都加以叙述。但是所謂群是什么，它的表現是什么，象这样一类問題，在引进时当然要写得使人容易理解。以下的叙述是在假定讀者已通曉物理数学初步(解析几何、微积分、簡单微分方程的解法及其在力学上的应用等)的前提下进行的，此外不再有其他假定（希望讀者一面讀一面好好考虑其中相当丰富的例子)。

首先自向量开始，学过力学的讀者可能知道"有方向与大小的量"謂之向量。三維空間的向量 $\boldsymbol{x}$，采用空間坐标，可以用三个分量 x_1, x_2, x_3 来表示(图 1)。假定坐标系已确定，它就可写成

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)\,, \tag{1.1}$$

或作为"列向量"写成

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

(与此对应，(1.1)的右边叫做"行向量")。

假定給定一个向量 $\boldsymbol{x}$ 与一个数(数量) λ，那末"$\boldsymbol{x}$ 的 λ 倍" $\lambda\boldsymbol{x}$ 这个向量就确定了。假定給定两个向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$，那末它們的"和" $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 这个向量也就确定了。它們的作法想讀者已知道(图 1.2)。如果用分量来表达，当 $\boldsymbol{x}$ 用(1.1)，而 $\boldsymbol{y}$ 用

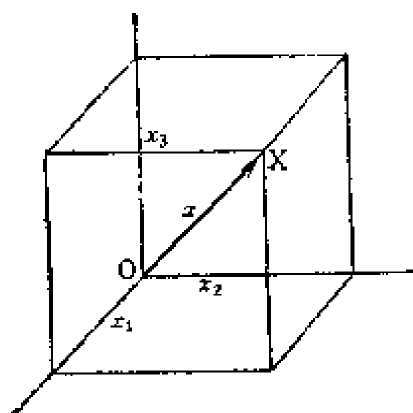
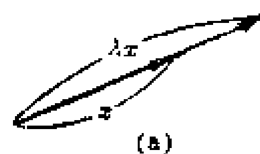


图 1.1



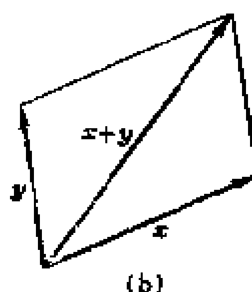


图 1.2

$$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3), \tag{1.3}$$

那末

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3), \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3). \tag{1.5}$$

因而有下面的計算規則成立：

交換律

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}, \tag{1.6}$$

結合律

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}). \tag{1.7}$$

在代数学中，这种"計算（也叫做运算，算法）規則"是值得重視的。对数学工作者来說，这不只是說說而已。例如由(1.6)，(1.7)的交換律与結合律就能够得到如下事实的証明。

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})$$
$$=\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x})=\cdots,$$

这就是說，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 三个向量有 $3!=6$ 种排列方法，而任意一种排列加上任何括弧所得的和都是相同的。有四个以上的向量时，同样的事实也成立。上述的 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 的和可省掉括弧而写成 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$. 一般有 k 个向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 时，它們的和用 $\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{x}_i$ 表示。总

之向量之間的加法能够象数之間的加法一样如常施行。这种事实成立的基础(即由它能够得到理論証明)或"公理"就是交换律，結合律。

現在考虑加法的逆运算减法。假如考虑作为"基础"的**零向量**

$$\mathbf{0}=(0,\ 0,\ 0)$$

及(1.1)的**逆向量**

$$-\boldsymbol{x}=(-x_1,\ -x_2,\ -x_3),$$

那末对于任意 $\boldsymbol{x}$,

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

因此,如果把 $\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{x})$写成 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$, 就有

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y},\quad (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y},$$

显然 $-\boldsymbol{x}$ 是 $+\boldsymbol{x}$ 的逆。总上所述,得到

A. 向量之間加减法能够如常施行。

其中"如常"的意义也許有些模糊,稍后将会明白。

作为 A 的基础之一的是交换律(1.6)。它在几何上已有証明,由上面可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}&=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)\\&=(y_1+x_1,\ y_2+x_2,\ y_3+x_3)\\&=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

这第二边与第三边相等是由于数的加法服从交换律。同样，由数的加法的結合律引出向量的結合律(1.7)。在数之間,除加法的交换律、結合律之外,乘法的交换律 $ab=ba$,結合律 $(ab)c=a(bc)$,加法与乘法之間的分配律 $a(b+c)=ab+bc$ 都成立。又对于任意数 a, $1a=a$. 由这些及(1.4),(1.5)可直接得到下面的 B.

B. 关于向量的数量倍,下面的規則成立。

$$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y},\tag{1.8}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}, \tag{1.9}$$

$$(\lambda\mu)\boldsymbol{x}=\lambda(\mu\boldsymbol{x}), \tag{1.10}$$

$$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}. \tag{1.11}$$

这里 λ, μ 是数量也就是数，至于指的是那种数，那并沒有限制。但对于力学上所考虑的向量，它当然是实数。实数有各种性质，但是特别用在向量代数上的是它們之間加减乘除的四則运算能够如常施行。由于它的重要性，特提出下面的 C。

C. 数量之間加减乘除运算能够如常施行（这里"如常"的意义在稍后会清楚）。

向量之間的加减法及向量与数量的乘法叫做向量的"綫性运算"。因为减法是加 (-1) 倍，所以把綫性运算說成"加法及数量倍"，內容也不会改变。若对向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 重复施行綫性运算，就得到象 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}_i$ 这样的向量。这 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}_i$ 叫做 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 的"1 次組合"，或称为"綫性組合"。

以上說明了力学中所考虑的向量之間能够施行綫性运算，并且揭示了 A, B, C 的成立。但同样的事实在数学的其他各个部門中也存在。例如就 n 阶綫性齐次常微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_n(x)y=0 \tag{1.12}$$

的解来考虑，这里系数 $p_i(x)$, $i=1, 2, \cdots, n$, 假定是 x 的解析函数，那末这方程就有 n 个"独立"的基本解 $y_1^0(x), \cdots, y_n^0(x)$，一般解 $y(x)$ 能够表为它們的綫性組合 $\sum_{i=1}^{n}c_iy_i^0(x)$，这就是熟知的"迭加原理"。綫性組合中的系数（数量）c_i 是复数。对于复数，加减乘除能够如常施行，即把复数看成数量，C 也成立。又假如 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是(1.12)的任意两个解，那末 $y_1(x)+y_2(x)$, $cy_1(x)$（c 是复数）也是(1.12)的解。对于它們的綫性运算，当然 A, B 成立。

§2 关于現代代数学的方法

B. L. van der Waerden 有名的教科书《近世代数学》(Moderne Algebra) I, II 于 1930～1931 年初版发行，此后又重版，在最近的新版中，"近世" (Moderne) 两字已自标題中除去，逕名为"代数学" (Algebra)。本书命名"代数学"是想同 van der Waerden 的代数学一样，自由地应用現代代数学的方法。因为今天"現代代数学"就是"代数学"。关于其一般方法，玆于此先进数言，也許对讀者会有好处。

作为它的方法的特征之一是"常采用集合論的記法"，例如实数全体的集合用 $\boldsymbol{R}$ 表示，复数全体的集合用 $\boldsymbol{C}$ 表示(这种記法継續在本书中采用)。假如采用这种記法，則"λ 是实数"这个事实就用"$\lambda\in\boldsymbol{R}$"(或"$\boldsymbol{R}\ni\lambda$")表示。又"实数是复数"(的一种)这一事实用"$\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$" (或"$\boldsymbol{C}\supset\boldsymbol{R}$")表示。一般，"$x\in M$"(或"$M\ni x$")就是"$x$ 是 M 中之**元**(或**元素**)"，換言之，即"x 属于集合 M"。"$M_1\supset M_2$"(或"$M_2\subset M_1$")就是"集合 M_2 是 M_1 的**子集合**"，亦即"M_2 中之元都是 M_1 中之元"。集合 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 的**和集**或**并集** (即属于 $M_1, M_2, \cdots M_k$ 中任意一个的元全体所成的集合) 用 $M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_k$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ 表示。$M_1, M_2, \cdots, M_k$ 的**通集**或**交集**(即同时屬于所有 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 的元全体的集合) 用 $M_1\cap M_2\cap\cdots\cap M_k$ 或 $\bigcap_{i=1}^{k} M_i$ 表示。屬于 M_1 而不属于 M_2 的元全体的集合用 M_1-M_2 表示。**空集** (即不包含元的集合)用 $\emptyset$ 表示(例如 $M\cup M=M\cap M=M$, $M-M=\emptyset$)。

第二个特征是"算法与算法规則的重視"，关于这方面，在前面已提及，今后这样的例子也到处可以看到，不再重述。

第三个特征是"抽象化，公理化的方法"。为防止消极的理解，

在这里特强調它的积极意义。数学原来是抽象的学問。1, 2, 3, …这些自然数是从1个人，2只鳥，3个苹果，…等抽象得到的，正因为它是被抽象出来的概念，所以应用广泛。

在前面已看到对于力学中所使用的向量，对于齐次綫性常微分方程的解，A, B, C 都成立。于是，仅只从 A, B, C 依邏輯方法演繹而得的理論，在任何場合——A, B, C 成立的所有場合——都能够应用。这时对所考虑的形象，只想着是力学中的向量就可以了。这样，通过直观考察作为仅只由 A, B, C 推証的結果（在初等几何学中，以图形为背景所考虑的証明与通过公理、定理推証的吻合），在微分方程論以及其他各分支中都有运用的可能性。因此不得不把 A, B, C 的內容用含义清晰的公理来叙述。这就是"抽象化，公理化方法"的説明。

最后要注意在抽象代数学中文字不一定表示数（不要拘泥于"代数"这个字面），文字可以表示向量、集合及其他各种东西。

§3 作为代数系的向量空間

由上面的説明，首先使§1, A 的內容清楚了。

在 A 是説向量之間"加减法能够如常施行"。一般所謂"在某集 S 中加减法能够如常施行"，其意义由下面五个公理来定义。

A1. S 是非空集，对于 $x, y\in S$, x, y 的"和" $x+y\in S$ 是唯一确定的（使 x, y 对应于 $x+y$ 的算法，叫做"加法"）。

A2. $x+y=y+x$（交換律）。

A3. $(x+y)+z=x+(y+z)$（結合律）。

A4. 对于 S 中任意元 x, S 中有1个适合 $x+0=0+x=x$ 这样的元0存在，它叫做**零元**。

A5. 对于 $x\in S$，有适合 $(-x)+x=x+(-x)=0$ 这样的"元 $(-x)\in S$ 存在。

这事实与常識上所考虑的"在 S 中加减法能够如常施行"有同样意义。这由§1, A 前面的説明大致可以明白。

一般,满足 A1~5 的集叫做**加群**。假如引用这概念,§1, A就是說"向量的集形成加群"。

例1 在加群 S 中, $x+y=x+z\Rightarrow y=z$.

[解] 两边自左加$(-x)$,得

$$(-x)+(x+y)=(-x)+(x+z).$$

由 A3, $$((-x)+x)+y=((-x)+x)+z,$$

由 A5, $$0+y=0+z,$$

由 A4, $$y=z.$$

例2 在加群 S 中,

$$x+y=x\Rightarrow y=0,\quad x+y=0\Rightarrow y=-x.$$

(因此, A4 中的 0 及 A5 中的 $-x$ 是唯一确定的。)

[解] 由例1即得。

例3 $-(-x)=x$(命 $-x=y$, 再用 $-y$ 的唯一性)。

把加群的概念更进一步抽象化,就得到下面可换群的概念。

A°1. 假定 S 是非空集合, 对于 $x, y\in S$, 給定了与 S 中元 $x\circ y$ 唯一对应的算法:

A°2. $$x\circ y=y\circ x\text{(交换律)。}$$

A°3. $$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)\text{(結合律)。}$$

A°4. 对于 S 中任意元 x, S 中存在 1 个满足 $x\circ e=e\circ x=x$ 这样的元 e.

A°5. 对于 $x\in S$, 存在满足 $x'\circ x=x\circ x'=e$ 这样的元 $x'\in S$.

满足 A°1~5 这样的集 S 叫做关于算法 $\circ$ 的**可换群**。A°4 中的 e 叫做可换群 S 的**单位元**, A°5 中的 x' 叫做 x 的**逆元**。

加群就是关于加法的可换群。在加群中单位元写成 0, x 的逆元写成 $-x$.

例如: 在实数之間加减法当然能够如常施行, 所以 $\boldsymbol{R}$ 成为加

群。在从 $\boldsymbol{R}$ 除去 0 后所成的集 $\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{R}-\{0\}$（$\{0\}$ 表示只由 0 形成的集）中，因为乘除法“能够如常施行”，所以 $\boldsymbol{R}^*$ 关于乘法做成可换群。它的单位元是 1，x 的逆元是 x 的倒数 $x^{-1}=\frac{1}{x}$。在 $\boldsymbol{R}$ 中，乘法不仅对 $\boldsymbol{R}^*$ 中元可行，即使对 0 也有定义，并且在加法与乘法之間成立着

分配律 $x(y+z)=xy+xz$。

“通常的四則运算”就是根据这些规則来施行的。因此“在某集 K 中加减乘除能够如常施行”由下面 C1～4 来定义。

C1．K 是至少含有两个元的集合。对于 $x,\ y\in K$，存在着分别唯一地对应于“和” $x+y$ 的“加法”及对应于“积” xy 的“乘法”。

C2．K 成为加群（它的单位元用 0 表示）。

C3．$K-\{0\}=K^*$ 关于乘法成为可换群（它的单位元用 1 表示）。

C4．分配律(3.1)成立。

满足 C1～4 的集叫做**体**。由于 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ 成为体，所以分别叫做**实数体与复数体**。第 4 頁 C 换言之就是“数量的集成为体”。

例 4 在体 K 中，必有 $0\cdot x=0,\ (-x)y=x(-y)=-xy,\ (-x)(-y)=xy$。

［解］ 由 0 的定义，$0+y=y$，由分配律，$(0-y)x=0x+yx=yx$。由于 K 是加群，所以根据 0 的唯一性（例 2），$0x=0$。又因为 $0=0y=(x+(-x))y=xy+(-x)y$，由 $-xy$ 的唯一性，$-xy=(-x)y$。同样，$-xy=x(-y)$。用例 3，即得 $(-x)(-y)=xy$。

例 5 在体 K 中，如果 $x\neq 0$，則 $xy=0 \Rightarrow y=0$。

［解］ 因为 $x\neq 0$，所以 x^{-1} 存在。用 x^{-1} 左乘 $xy=0$ 的两边，即得。

上面的加群，可换群，体，都能够象下面那样来定义，即

(i) 有某集合，在这集合中定义了某种算法。

(ii) 这些算法满足所給定的几个法則。

一般，把“在它的元之間能够进行满足某法則的算法的集合”

叫做以这算法做"基本算法"的代数系。加群,可換群,体,都是代数系的特例。現代代数学,用一句話来說,那就是"代数系的理論"。

体 K 給定时,"K 上向量空間" V 定义为满足下面 A, B1～5 的代数系。

A. V 成为加群。

B1. 当 $x\in V$, $\lambda\in K$ 給定时,"x 的 λ 倍" λx 也在 V 中, 而且是唯一确定的。

B2. 对于 x, $y\in V$, $\lambda\in K$,有 $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.

B3. 当 $x\in V$, λ, $\mu\in K$,有 $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

B4. 当 $x\in V$, λ, $\mu\in K$, 有 $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$.

B5. $1\cdot x=x$.

注意 向量空間也叫做**綫性空間**或**綫性流形**。 又"K 上向量空間"也叫做 **K 加群**。K 叫做 K 上向量空間的**基础体**。

例 6 在体 K 上向量空間中,

$$0x=0,\quad (-1)x=-x,\quad (-\lambda)x=-\lambda x.$$

$$\lambda x=0,\ \lambda\neq 0 \Leftrightarrow x=0.$$

[解] 与例 4, 5 同样推得。

§1 所說 "在力学中使用的向量" 是 $\boldsymbol{R}$ 上向量空間中元。 綫性微分方程的解是 $\boldsymbol{C}$ 上向量空間中之元(也許甚至还有人认为把微分方程解的集合叫做"向量空間"是不适当的,但由 §2 所述, 这样命名不但沒有妨碍,而且反而便利)。

在本书中討論的所謂"綫性代数"无非是 "体 K 上向量空間" 这个代数系的理論。 因此, 本节的公理 A, B, C 是全部的基础。但是不习慣这样考虑的讀者只要把在 §1 中所示的大体了解为公理也就可以了。

例 7 体 K 自身可以看做 K 上向量空間。

[解] 例如把 $x+y$ $(x\in K,\ y\in K)$, λx $(\lambda\in K,\ x\in K)$ 分别当作在 K 中定义的加法及乘法,那末公理 A1～5, B1～5 能够满足。

例 8 假定 n 是給定的自然数，由体 K 中 n 个元所作的行向量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$（或叫做 K 上 **n-行向量**）用 x 表示：$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$。假設这样 x 全体的集合是

$$^nK=\{x;\ \ x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \xi_i \in K\}.$$

（一般 $\{x; \cdots\}$ 是表示"具有……性质的 x 全体的集合"。这記法今后常采用。）对于 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in {}^nK$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in {}^nK$，$\lambda \in K$，如果定义 $x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n)$，$\lambda x=(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots, \lambda\xi_n)$，那末 ^nK 成为 K 上向量空間。命 $_1e=(1, 0, \cdots, 0)$，$_2e=(0, 1, 0, \cdots, 0)$，$\cdots$，$_ne=(0, \cdots, 0, 1)$，于是 $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)=\xi_1 \cdot {}_1e+\cdots+\xi_n \cdot {}_ne$。同样，"$K$ 上 **n-列向量**（其意义自明）的集合 K^n 也是 K 上向量空間。

例 9 假定由体 K 中无穷多个元所成的集合是

$$^\infty K=\{x; x=(\xi_1, \xi_2, \cdots), \xi_i \in K\}.$$

对于 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots) \in {}^\infty K$，$\lambda \in K$，如果定义

$$x=y \Leftrightarrow \text{对于所有的 } n, \xi_n=\eta_n,$$

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots), \lambda x=(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots),$$

那末 $^\infty K$ 成为 K 上向量空間。

例 10 假定 $a, b \in \boldsymbol{R}$，那末集合 $\{x; a \leqslant x \leqslant b\}$ 叫做**閉区間**，用 $[a, b]$ 表示。又 $\{x; a<x<b\}$ 叫做**开区間**，用 (a, b) 表示。开区間、閉区間和下面的各集合总称为**区間**。

$$(a, b]=\{x; a<x \leqslant b\}, [a, b)=\{x; a \leqslant x<b\},$$

$$(-\infty, b]=\{x; x \leqslant b\}, [a, +\infty)=\{x; a \leqslant x\},$$

$$(-\infty, b)=\{x; x<b\}, (a, +\infty)=\{x; a<x\}, (-\infty, \infty)=\boldsymbol{R}.$$

定义于 $[a, b]$ 取实数值的函数全体的集合表为

$$\mathfrak{F}([a, b], \boldsymbol{R})=\{f; x \in [a, b], f(x) \in \boldsymbol{R}\}.$$

（当 $[a, b]$ 給定，不致引起誤解时，也常单用 $\mathfrak{F}$ 表示。）对于 f, g，如果定义

$$f=g \Leftrightarrow \text{对于所有 } x \in [a, b], f(x)=g(x),$$

$$\text{对于所有 } x, (f+g)(x)=f(x)+g(x), (\lambda f)(x)=\lambda f(x), (\lambda \in \boldsymbol{R}),$$

显然 $\mathfrak{F}$ 成为 $\boldsymbol{R}$ 上向量空間。

在 $\mathfrak{F}$ 的子集中，假定所有連續函数的集合是 $\mathfrak{C}^0([a, b], \boldsymbol{R})$，根据上面的和，$\lambda$ 倍的定义，它也成为 $\boldsymbol{R}$ 上向量空間。更在 $[a, b]$ 中，假定 n 阶連續可微函数全体的集合是 $\mathfrak{C}^n([a, b], \boldsymbol{R})$，无限阶連續可微函数全体的集合是 $\mathfrak{C}^\infty([a, b], \boldsymbol{R})$，它們根据同样定义，也成为 $\boldsymbol{R}$ 上向量空間。

在 $\mathfrak{C}^0$ 的子集中，假定在 $[a, b]$ 内解析(即对于 $[a, b]$ 中各点 x_0，$f(x)$ 在 x_0 邻域的値可用 $x-x_0$ 的冪級数来表示)函数全体的集合写成 $\mathfrak{A}([a, b], \boldsymbol{R})$，則它根据同样定义，也成为 $\boldsymbol{R}$ 上向量空間。

取区間 Δ 来代替$[a, b]$，考慮 $\mathfrak{F}(\Delta, \boldsymbol{R})$，$\mathfrak{C}^0(\Delta, \boldsymbol{R})$，$\mathfrak{C}^n(\Delta, \boldsymbol{R})$，$\mathfrak{C}^\infty(\Delta, \boldsymbol{R})$，$\mathfrak{A}(\Delta, \boldsymbol{R})$，它們的定义是明显的。它們也能够成为 $\boldsymbol{R}$ 上向量空間。对于任意区間 Δ，显然 $\mathfrak{F}\supset\mathfrak{C}^0\supset\mathfrak{C}^1\supset\mathfrak{C}^2\supset\cdots\supset\mathfrak{C}^\infty\supset\mathfrak{A}$。

又对于定义在复数平面区域 D 中的复値函数，同样定义 $\mathfrak{F}(D, \boldsymbol{C})$，$\mathfrak{A}(D, \boldsymbol{C})$，它們都成为 $\boldsymbol{C}$ 上向量空間，$\mathfrak{F}\supset\mathfrak{A}$。

由以上所定义的这些函数，形成的各种向量空間，总称为**函数空間**。

§4 子空間，生成元，直和分解

以后我們約定，体 K 上向量空間用 V 表示，K 之元(叫做数量)用希腊字母 $\alpha, \beta, \cdots$ 表示，V 之元(叫做向量)用 $x, y, z, \cdots$ (必要时附加添数)表示。K 的加群的单位元 0 与 V 的 0 用同一的記号表示。假如注意前后关系，当不致引起混淆。

向量空間的基本算法是加法与"数量倍"。这两种算法合称为**綫性运算**(也叫做**1次运算，1次算法**等。"綫性"与"1次"，"运算"与"算法"是同义的)。关于向量空間 V 的子集 M_1, M_2，有下面的記法

$$M_1+M_2=\{x_1+x_2;\ x_1\in M_1,\ x_2\in M_2\}, \tag{4.1}$$

$$\lambda M_1=\{\lambda x_1;\ x_1\in M_1\}. \tag{4.2}$$

((4.1)的右边表示 M_1 中元 x_1 与 M_2 中元 x_2 的和 x_1+x_2 全体的集合，(4.2)的右边表示 M_1 中元 x_1 的 λ 倍 λx_1 全体的集合。这样的記法，今后常常采用，参照 §3，例 8)。

例 1

$$V+V=V,\quad \lambda V=V,$$
$$\{0\}+\{0\}=\{0\},\quad \lambda\{0\}=\{0\}.$$

V 的子集 $W(\neq\emptyset)$ 假如满足下面两个条件：

(a) $W+W\subset W$，

(b) 对于任意 $\lambda\in K$, $\lambda W\subset W$,

那末我們就說 W "关于綫性运算是閉的"。这时 W 滿足 §3, A1, B1. 因为对于 V, A2, 3, B2～5 滿足，所以对于它的子集 W，这些条件也成立。再假如 $x\in W$ (因为 $W\neq\emptyset$, 所以这样的 x 是存在的)，那末 $0x=0$, $(-1)x=-x$ (§3, 例 6)。所以由(b), $0\in W$, $x\in W\Rightarrow -x\in W$. 即 A4, A5 也成立，于是 W 成为向量空間。因此滿足(a), (b)的 $W\subset V$ 叫做 V 的**子空間**（一般，对于某代数系 S, $T\subset S$, 假如在上面同样的意义下，"关于 S 的基本算法是閉的"，那末 T 也与 S 同样成为代数系。这时 T 叫做 S 的**子系**)。

例 2　V 及 $\{0\}$ 成为 V 的子空間(参照例 1)。又假如 W 是任意子空間，那末 $V\supset W\supset\{0\}$.

例 3　假如(a)成立，那末 $W+W=W$. 又当(b)成立时，假如 $\lambda\neq 0$，那末 $\lambda W=W$. (由 A4, B4, 5, C3.)❶

今后暫时固定 V，凡子空間是指 V 的子空間，子空間全体的集合用 $\mathfrak{V}$ 表示。

命題❷ 1　$\mathfrak{V}\ni W_1, W_2\Rightarrow W_1\cap W_2\in\mathfrak{V}$.

一般❸，
$$\{W_\alpha\}\subset\mathfrak{V}\Rightarrow\bigcap_\alpha W_\alpha\in\mathfrak{V}.$$

証明　$W_\alpha\in\mathfrak{V}$, 命 $W=\bigcap_\alpha W_\alpha$, 对于 W, 証明(a), (b)成立即可。

假定 $x, y\in W$, 那末对于所有的添数 α, $x, y\in W_\alpha$. 因为 $W_\alpha\in\mathfrak{V}$, 所以 $x+y\in W_\alpha$, $\lambda x\in W_\alpha$. 因为这对于所有的 α 成立，所以 $x+y\in W$, $\lambda x\in W$.

---

❶ 由 A4, 对于 $x\in W$, $x=0+x\in W+W$ 即 $W\subset W+W$, 所以 $W=W+W$. 又由 B5, $x=1\cdot x$, 由 C3, $1=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}$, 因此 $x=1\cdot x=\left(\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}\right)x=\lambda\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ (由 B4). 但 $\frac{1}{\lambda}x\subset\frac{1}{\lambda}W\subset W$, 于是 $x\in\lambda W$ 即 $W\subset\lambda W$, 所以 $\lambda W=W$. ——譯者注

❷ 以下，把定理中意义較輕的叫做"命題"。定理是这样叙述的，只讀它就可以理解。但"命題"中有时对有关記法，不加說明。

❸ $\{W_\alpha\}$ 是有添数 α (有限个或无限个)的 W_α 的集合。

命題 2 假定 M 是 V 的任意子集,那就存在唯一含 M 的"最小"子空間 W. 即唯一存在 W 滿足:

(i) $W\in\mathfrak{V}$, (ii) $W\supset M$, (iii) $W_1\in\mathfrak{V}$, $W_1\supset M\Rightarrow W_1\supset W$.

証明 假定含 M 的子空間全体的集合是 $\{W_\alpha\}$, $\bigcap\limits_\alpha W_\alpha=W$, 由命題 1, (i)成立。(ii)是明显的。又假如 $W_1\in\mathfrak{V}$, $W_1\supset M$, 因为 W_1 是含 M 的子空間,所以可以看成是 1 个 W_α, 因此 (iii) 成立。

再假定(i') $W'\in\mathfrak{V}$, (ii') $W'\supset M$, (iii') $W_1'\in\mathfrak{V}$, $W_1'\supset M\Rightarrow W_1'\supset W$, 由(i'), (ii'), (iii)(在(iii)考虑 $W_1=W'$), $W'\supset W$. 又由(i), (ii), (iii'), $W\supset W'$, 因此 $W=W'$. (証毕)

在命題 2 中所确定的 W 叫做由 M **生成**的子空間,用 $[M]$ 表示。当 $M=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_k$ 时, $[M]$写成$[M_1, M_2, \cdots, M_k]$. 当 M 是由有限个元 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 构成时(即 $M=\{x_1, x_2,\cdots, x_k\}$ 时), $[M]$ 写成$[x_1, x_2, \cdots, x_k]$. 又这时 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 叫做$[x_1, x_2, \cdots, x_k]$的**生成元**。

例 4 $M_1\supset M_2\Rightarrow[M_1]\supset[M_2]$; $W\in\mathfrak{V}\Leftrightarrow W=[W]$; $[[M]]=[M]$.

命題 3 $W_1, W_2\in\mathfrak{V}\Rightarrow[W_1, W_2]=W_1+W_2$.

証明 假定 $W=[W_1, W_2]$, $W'=W_1+W_2=\{x_1+x_2;\ x_1\in W_1, x_2\in W_2\}$,因此只要証明(i) $W\supset W'$, (ii) $W'\supset W$ 即可。

(i) 因为 $W\in\mathfrak{V}$, $W_1, W_2\subset W$, $x_1\in W_1$, $x_2\in W_2$, 根据子空間的条件(a), $x_1+x_2\in W$,所以 $W'\subset W$.

(ii) 因为 $0\in W_2$,所以对于任意 $x_1\in W_1$, $x_1=x_1+0\in W'$,于是 $W_1\subset W'$. 同样 $W_2\subset W'$. 因此,假如能够証明 $W'\in\mathfrak{V}$,由命題2 (iii),即得 $W'\supset W$❶.

---

❶ 这时 $W=[W_1, W_2]$, $M=W_1\cup W_2$. 因为 $W_1\subset W'$, $W_2\subset W'$ 所以 $W'\supset W_1\cup W_2$ 即 $W'\supset M$. 因此,假如 $W'\in\mathfrak{V}$ 成立,由命題 2 的(iii)即得 $W'\supset W$. ——譯者注

$W'\in\mathfrak{V}$ 的証明：假定 $x_1+x_2,\ x_1'+x_2'\in W'\ (x_i,\ x_i'\in W_i,\ i=1,2)$，那末 $(x_1+x_2)+(x_1'+x_2')=(x_1+x_1')+(x_2+x_2')\in W'$．又 $\lambda(x_1+x_2)=\lambda x_1+\lambda x_2\in W'$．即 W' 満足(a)，(b)．

系1　$W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_k\in\mathfrak{V}\Rightarrow[W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_k]=W_1+W_2+\cdots+W_k$．

系2　$[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k]=\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k;\ \lambda_i\in K\}$❶．

例5　${}^nK=[{}_1e,\ {}_2e,\ \cdots,\ {}_ne]$（§3 例8的記法）。

又假如

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\quad e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

那末，

$$K^n=[e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n]．$$

$W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_k\in\mathfrak{V}$ 时，$W=[W_1,\ \cdots,\ W_k]=W_1+W_2+\cdots+W_k\ (\in\mathfrak{V})$ 叫做 $W_1,\ W_2,\cdots,W_k$ 的**和或和空間**，写成 $W=\sum_{i=1}^{k}W_i$．关于它的子空間之間的"加法"，显然交换律与結合律都成立。$\{0\}\in\mathfrak{V}$ 是它的"加法"的单位元。

假定 $W=\sum_{i=1}^{k}W_i$，那末 W 中任意元 x 可以表成 $\sum_{i=1}^{k}x_i$ 的形状，但是这表示不一定是唯一的。如果这表示是唯一的，那末 W 叫做 $W_1,\ W_2,\cdots,W_k$ 的**直和**，写成 $W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_k$ 或 $\sum_{i=1}^{k}\oplus W_i$，这一表式称为 W 的**直和分解**，W_i 叫做这分解的**直和因子**。假如 $\{0\}=W_0$，显然 $W=\sum_{i=1}^{k}\oplus W_i\Rightarrow W=\sum_{i=0}^{k}\oplus W_i$．又假如在 $W_1,\ W_2,$

---

❶ 因为 $[x_i]$ 是含 x_i 的最小子空間，显然它是由 $\lambda x_i,\ \lambda\in K$ 構成的，因此 $[x_i]=\{\lambda x_i,\ \lambda\in K\}$，于是 $[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k]=[[x_1],\ [x_2],\ \cdots,\ [x_k]]=[x_1]+[x_2]+\cdots+[x_k]=\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k,\ \lambda_i\in K\}$．——譯者注

$\cdots$, W_k 中有等于 W_0 的，譬如 $W_1=W_0$，那末 $W=\sum_{i=1}^{k}\oplus W_i \Rightarrow W=\sum_{i=2}^{k}\oplus W_i$. 这样，因为 $\{0\}$ 作为直和因子是无关紧要(irrelevant)的，所以今后不特别声明，$\{0\}$ 不考虑作为直和因子。

例 6 ${}^nK=[{}_1e]\oplus\cdots\oplus[{}_ne]$, $K^n=[e_1]\oplus\cdots\oplus[e_n]$.

直和分解

$$W=W_1\oplus\cdots\oplus W_k \tag{4.3}$$

給出时，任意元 $x\in W$ 可以唯一地写成

$$x=x_1+\cdots+x_k,\quad x_i\in W_i. \tag{4.4}$$

这时 x_i 叫做 x 的 **W_i 分量**。設 W 中元 y 的 W_i 分量是 y_i，那末

$$y=y_1+\cdots+y_k, \tag{4.5}$$

由(4.4)，(4.5)得

$$x+y=(x_1+y_1)+\cdots+(x_k+y_k), \tag{4.6}$$

$$\lambda x=\lambda x_1+\cdots+\lambda x_k. \tag{4.7}$$

因为 $x_i+y_i\in W_i$, $\lambda x_i\in W_i$，所以(4.6)，(4.7)給出 $x+y$, λx 各 W_i 分量的分解。

直和概念，对于其他代数系也可定义(代数系的基本算法是乘法的形状时，又命名为"直积")。在现代代数学一般观点下，这一概念頗为重要，所以下面另述一种說法。

一般，k 个集合 $M_1,\cdots,M_k$(k 为自然数)的**直积** $M=M_1\times\cdots\times M_k$ 定义为由这 k 个集合中元形成的元組(k 重)的集合

$$\{(x_1,\cdots,x_k);\ x_i\in M_i\}.$$

两个組$(x_1,\cdots,x_k)$与$(x_1',\cdots,x_k')$当 $x_1=x_1',\cdots,x_k=x_k'$ 时且限于这时定义为相等。

例 7 假定 $M_1,\cdots,M_k$ 都是有限集合，它們分别有 $m_1,\cdots,m_k$ 个元，那末 $M_1\times\cdots\times M_k$ 是由 $m_1\cdots m_k$ 个元所构成。

于是，当 k 个向量空間 $V_1,\cdots,V_k$ 給定时，在它們的直积 V

中，元組之間可定义如下的綫性运算：

$$(x_1, \cdots, x_k)+(y_1, \cdots, y_k)=(x_1+y_1, \cdots, x_k+y_k),$$

$$\lambda(x_1, \cdots, x_k)=(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_k).$$

这样，V 成为向量空間是很明显的（参照§1）。这时 V 叫做 $V_1, \cdots, V_k$ 的**直和**，写成 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$。

上面直和的概念有了两种定义，說明它們在实质上一致是必要的。为此应先叙述在一般現代代数学中重要的同构的概念。

假定有两个向量空間 V 及 V'，f 是自 V 到 V' 的一对一的映射（关于映射的詳述，参照后面的§6），即对于 $x \in V$，x 在映射 f 下的象 $f(x) \in V'$ 唯一确定，这时(1) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$（这时叫 f 是**一对一**的）；(2) $\{f(x); x \in V\}=V'$（这时叫 f 是把 V 映成 V' 的映射）成立。并且

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

$$f(ax)=\lambda f(x).$$

（这时映射 f 叫做**保存**綫性运算），那末 f 叫做自 V 到 V' 的**同构映射**。这样的同构映射存在时 V 与 V' 叫做同构，記为 $V \cong V'$（在一般的代数系中，对于同种的代数系 S, S'，假如有自 S 到 S' 上的一对一的保存基本算法的映射，那末 S, S' 叫做同构，这样的映射叫做同构映射）。同构关系显然是**等价关系**，即

反射律 $V \cong V$,

对称律 $V \cong V' \Rightarrow V' \cong V$,

推移律 $V \cong V'$, $V' \cong V'' \Rightarrow V \cong V''$.

（一般满足反射、对称、推移三律的关系叫做等价关系。）同构的代数系也称为“是具有同样的构造”。

回到前面，来証明上面直和的两种定义实质上是一致的。首先，为了区别它們，假定根据第一个定义，$W_1, \cdots, W_k$ 的直和象前面一样用 $W=\sum_{i=1}^{k}\oplus W_i$ 表示，根据第二定义，$W_1, \cdots, W_k$ 的直

和用 $\dot{W}=\sum_{i=1}^{k}\dot{\oplus}W_i$ 表示。我們将証明 $W\cong\dot{W}$. 为此,对于

$$x=x_1+\cdots+x_k\in W,$$

使与

$$(x_1,\ \cdots,\ x_k)\in\dot{W}$$

对应即可。即假定 $f(x)=(x_1,\ \cdots,\ x_k)\in\dot{W}$. 容易知道这 f 是自 W 到 $\dot{W}$ 的同构映射。因此以后 $\Sigma\dot{\oplus}$ 这样的記法不再采用,但是 $\Sigma\dot{\oplus}W_i$ 的构造由 W_i 的构造确定,而且在 $W=\Sigma\oplus W_i$ 时,W_i 一般是比 W"小"的向量空間。于是假如 W 能够直和分解,那末 W 的构造可以用比 W 小的空間的构造来确定。这事实有利于問題的簡化,今后将一再引用。

V 的任意子空間 $W_1, \cdots, W_k$ 的和空間总是存在的,但它一般不是直和(例:設 $V\neq\{0\}$,那末 $V=V+V\neq V\oplus V$)。首先,因为不考虑把 $\{0\}$ 作为直和因子,决定用 $\mathfrak{W}^*$ 来表示 $\mathfrak{W}-\{0\}$. 对于 $W_1, \cdots, W_k\in\mathfrak{W}^*$ $(k\geqslant 2)$,如果 $W_1+\cdots+W_k=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$,則称 $W_1, \cdots, W_k$ **无关**(仅只一个 $W_1\in\mathfrak{W}^*$ 总是叫做无关)。其次我們来証明下面一个关于判定 $\mathfrak{W}^*$ 的空間无关性的定理来結束本节,为了自然地引进定理的証明,先举它的一个特例,即下面的引理。

引理 1 假定 $W_1, W_2\in\mathfrak{W}^*$, $W_1\cap W_2=\{0\}$,那末 W_1, W_2 无关。

証明 对偶地証明"假定 $W_1, W_2\in\mathfrak{W}^*$ 而 W_1, W_2 相关,那末 $W_1\cap W_2\neq\{0\}$".

若 W_1, W_2 相关,那就有 $x_1+x_2=x_1'+x_2'$, $x_i, x_i'\in W_i$, $i=1, 2$,并且 $x_i\neq x_i'$. 将上式移项得 $x_1-x_1'=x_2'-x_2$,它的左边 $\in W_1$ 而右边 $\in W_2$,所以 $\in W_1\cap W_2$,但这元不是 0.

定理 1 向量空間 V 中异于$\{0\}$的子空間 $W_1, \cdots, W_k$(k 是自然数$\geqslant 2$)成为无关,下面的(i)~(iv)都是必要充分条件。

(i) $x_1+\cdots+x_k=0,\ x_i\in W_i\Rightarrow x_i=0,\ i=1,\ \cdots,\ k.$

(ii) $W_1, \cdots, W_{k-1}$ 无关，$(W_1+\cdots+W_{k-1})\cap W_k=\{0\}$。

(iii) $(W_1+\cdots+W_{i-1}+W_{i+1}+\cdots+W_k)\cap W_i=\{0\}$, $i=1, \cdots, k$。

(iv) $W_1\cap W_2=\{0\}$, $(W_1+W_2)\cap W_3=\{0\}$, $\cdots$, $(W_1+\cdots+W_{k-1})\cap W_k=\{0\}$。

証明 把 $W_1, \cdots, W_k$ 无关这个条件作为(0)，依这样的顺序 (0)⇒(i)⇒(ii)⇒(0)，(0)⇒(iii)⇒(i)，(0)⇒(iv)⇒(i)来証明。(0)詳細説就是

$$W=\sum_{i=1}^{k} W_i=\sum_{i=1}^{k}\oplus W_i,$$

这意味着 $x\in W$ 象 (4.4) 那样的分解是唯一的。但要注意它与 $W_1, \cdots, W_k$ 的顺序(排列方法)无关。

(0)⇒(i)。假如把 $0\in W$ 分解为 k 个 0 成为 $0=0+\cdots+0$ $(0\in W_i)$，就得到一个"0 的分解"((4.4)的意义)，但是由(0)它沒有其他的分解，因此(i)成立。

(i)⇒(ii)。只要証明(a)假如 $W_1, \cdots, W_{k-1}$ 不无关，那末(i)不成立，及(b)假如 $(W_1+\cdots+W_{k-1})\cap W_k\neq\{0\}$，那末(i)也不成立就行了。

(a) 如果 $W_1, \cdots, W_{k-1}$ 不无关，那末 $W_1+\cdots+W_{k-1}$ 中某个元能有两种分解，因此 $x_1+\cdots+x_{k-1}=x'_1+\cdots+x'_{k-1}$, $x_i, x'_i\in W_i$, $i=1, \cdots, k-1$，并且对于某个 i, $x_i\neq x'_i$。于是 $(x_1-x'_1)+\cdots+(x_{k-1}-x'_{k-1})+0=0$, $x_i-x'_i\in W_i$, $i=1, \cdots, k-1$, $0\in W_k$，所以(i)不成立。

(b) 由假設，存在满足 $(W_1+\cdots+W_{k-1})\cap W_k\ni x_k\neq 0$ 的 x_k。因为 $x_k\in W_k$，并且 $x_k\in W_1+\cdots+W_{k-1}$，所以可以写成 $x_k=x_1+\cdots+x_{k-1}$, $x_i\in W_i$, $i=1, \cdots, k-1$。于是 $x_1+\cdots+x_{k-1}-x_k=0$, $-x_k\neq 0$，因此(i)不成立。

(ii)⇒(0). 假如 $x\in W_1+\cdots+W_k$, 由引理 1, x 能够唯一地分解为 $x_k'+x_k$, $x_k'\in W_1+\cdots+W_{k-1}$, $x_k\in W_k$ 的形状。又因为 $W_1, \cdots, W_{k-1}$ 是无关, 所以 x_k' 能够唯一地分解为 $x_1+\cdots+x_{k-1}$ 的形状。

(0)⇒(iii). 由已經証明的(0)⇒(ii),即得(iii)中 $i=k$ 情形。由上面的注意,因为在(0), $W_1\cdots, W_k$ 的順序可以任意更换,所以得到对于其他 i 的(iii).

(iii)⇒(i). 假設 $x_1+\cdots+x_k=0$, 如果 $x_k\neq 0$, 因为 $x_1+\cdots+x_{k-1}=-x_k\in(W_1+\cdots+W_{k-1})\cap W_k$, 所以与(iii)矛盾。

(0)⇒(iv). 由已經証明的(0)⇒(ii)即得最后的$(W_1+\cdots+W_{k-1})\cap W_k=\{0\}$, 并且因为 $W_1, \cdots, W_{k-1}$ 是无关, 又得到它前面的$(W_1+\cdots+W_{k-2})\cap W_{k-1}=\{0\}$, 余类推。

(iv)⇒(i). 假定 $x_1+\cdots+x_k=0$ 中的 $x_1, \cdots, x_k$ 不完全都是0, 譬如它最后不为0的是 x_j, 那末与(iii)⇒(i)的証明同样就得到与$(W_1+\cdots+W_{j-1})\cap W_j=\{0\}$ 矛盾。

系 假定 $W_1, \cdots, W_k\in\mathfrak{W}^*$ 无关,那末 $W_{\nu_1}, \cdots, W_{\nu_l}(\{\nu_1, \cdots, \nu_l\}\subset\{1, \cdots, k\} l\leqslant k)$ 也无关❶。

例8 在 ^nK 中,$[_1e], \cdots, [_ne]$是无关。

§5 綫性无关,綫性相关,維数,基底

K 上向量空間 V 中异于0的元的集合 $V-\{0\}$ 用V^* 表示。假如 $x\in V^*$, 显然 $[x]=\{\lambda x;\ \lambda\in K\}\in\mathfrak{W}^*$. 所謂 $x_1, \cdots, x_k\in V^*$ **綫性无关**(或簡称**无关**)是意味着 $[x_1], \cdots, [x_k]\in\mathfrak{W}^*$ 无关(§4), 即 $[x_1, \cdots, x_k]$ 中任意元 x 能够唯一地表为 $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k$, $\lambda_i\in K$

❶ 假如 $W_1, \cdots, W_l(l<k)$相关, 由(i)就有滿足 $x_1+\cdots+x_l=0$ 而$x_1, \cdots, x_l$ 不完全是0的元 $x_1, \cdots, x_l$, 于是 $x_1+\cdots+x_l+\underbrace{0+\cdots+0}_{k-l\text{个}}=0$, 这与 $W_1, \cdots, W_k$ 无关的假設矛盾。——譯者注

的形状(特别只是一个 $x\in V^*$ 总是无关的)。

对于 $W\in\mathfrak{V}^*$, $x\in V^*$, 显然

$$W \not\ni x \Leftrightarrow W\cap[x]=\{0\}.$$

据此,由定理1立即得到下面的定理。

定理 2 向量空間 V 中异于0的元 $x_1,\cdots,x_k$(k 是自然数 $\geqslant 2$)成为綫性无关,下面的(i)~(iv)都是它的必要充分条件。

(i) $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k=0,\ \lambda_i\in K\Rightarrow\lambda_i=0,\ i=1,\ \cdots,\ k.$

(ii) $x_1,\ \cdots,\ x_{k-1}$ 綫性无关, $x_k\notin[x_1,\ \cdots,\ x_{k-1}]$.

(iii) $x_i\notin[x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_k],\ i=1,\ \cdots,\ k.$

(iv) $x_2\notin[x_1],\ x_3\notin[x_1,\ x_2],\ \cdots,\ x_k\notin[x_1,\ \cdots,\ x_{k-1}].$

系 假定 $x_1,\ \cdots,\ x_k\in V^*$ 无关,那末 $x_{\nu_1},\ \cdots,\ x_{\nu_l}$($\{\nu_1,\ \cdots,\ \nu_l\}\subset\{1,\ \cdots,\ k\},\ l\leqslant k$)也无关。

例 1 在 ${}^nK$ 中, ${}_1e,\ \cdots,\ {}_ne$ 是无关。

当 $x_1,\ \cdots,x_k\in V$ 不是綫性无关时, $x_1,\ \cdots,\ x_k$ 叫做**綫性相关**或簡称**相关**。特别是 $x_1,\ \cdots,\ x_k$ 中如果有一个是0,那末 $x_1,\cdots,x_k$ 相关。

例 2 $x_1,\ \cdots,\ x_k$ 相关意味着 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k$ 中至少有一个不是0而 $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k=0$ 成立。

例 3 在 $x_1,\ \cdots,\ x_k(k\geqslant 2)$ 中,如果 $x_i=x_j\ (i\neq j)$,那末 $x_1,\ \cdots,\ x_k$ 相关。

例 4 假如 $x_1,\ \cdots,\ x_{k-1}$ 无关而 $x_1,\ \cdots,\ x_{k-1},\ x_k$ 相关,那末 $x_k\in[x_1,\ \cdots,\ x_{k-1}]$.

定理 3 假定 $x_1,\ \cdots,\ x_m$ 是向量空間 V 中任意有限个元的集合,那末除 $x_1=\cdots=x_m=0$ 的情形外,能找到 $\{1,\ \cdots,\ m\}$ 的适当子集合 $\{\nu_1,\ \cdots,\ \nu_k\}$ ($1\leqslant\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_k\leqslant m,\ k\leqslant m$),使得下面的条件成立:

(i) $x_{\nu_1},\ \cdots,\ x_{\nu_k}$ 綫性无关。

(ii) $[x_1,\ \cdots,\ x_{\nu_2-1}]=[x_{\nu_1}]$,

$[x_1,\ \cdots,\ x_{\nu_3-1}]=[x_{\nu_1},\ x_{\nu_2}]$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[x_1, \cdots, x_m] = [x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \cdots, x_{\nu_k}].$$

証明 自 $x_1, \cdots, x_m$ 中象下面那样挑选 $x_{\nu_1}, \cdots, x_{\nu_k}$ 即可。

假如 $x_1 \in V^*$（即 $x_1 \neq 0$），取 $\nu_1 = 1$. 假如 $x_1 = 0$, 把 $x_1, x_2, \cdots$ 中最初不是零的向量作为 x_{ν_1}. 于是

$$[x_1, \cdots, x_{\nu_1}] = [x_{\nu_1}].$$

再假如 x_{ν_1}, x_{ν_1+1} 无关（即 $x_{\nu_1+1} \notin [x_{\nu_1}]$），取 $\nu_2 = \nu_1 + 1$. 假如 x_{ν_1}, x_{ν_1+1} 相关，把 $x_{\nu_1+1}, x_{\nu_1+2}, \cdots$ 中最初不在 $[x_{\nu_1}]$ 中的向量作为 x_{ν_2}, 于是由定理 2 的(iv)，x_{ν_1}, x_{ν_2} 无关，

$$[x_1, \cdots, x_{\nu_2-1}] = [x_{\nu_1}],$$

$$[x_1, \cdots, x_{\nu_2}] = [x_{\nu_1}, x_{\nu_2}].$$

余类推。

定理 4 假定 $x_1, \cdots, x_k$ 是向量空間 V 中任意有限个元的集合，$y_1, \cdots, y_h \in [x_1, \cdots, x_k]$ $(h \geq 1)$，并且 $y_1, \cdots, y_h$ 无关，那末 $h \leq k$, 并且可以挑选$\{1, \cdots, k\}$的适当子集合$\{\nu_1, \cdots, \nu_h\}$，使得

$$1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_h \leq k,$$

$$\begin{aligned}[x_1, \cdots, x_k] = [x_1, \cdots, x_{\nu_1-1}, y_1, x_{\nu_1+1}, \cdots,\\ \cdots, x_{\nu_2-1}, y_2, x_{\nu_2+1}, \cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots, x_{\nu_h-1}, y_h, x_{\nu_h+1}, \cdots, x_k].\end{aligned}$$

証明 首先因为$[x_1, \cdots, x_k] \ni y_1 \neq 0$, 的确 $k \geq 1$, 并且不能有 $x_1 = \cdots = x_k = 0$. 再在 $y_1 = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ 的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 中有不是 0 的。假如 λ_{ν_1} 是其一，那末

$$\begin{aligned}x_{\nu_1} = \frac{1}{\lambda_{\nu_1}} y_1 - \frac{1}{\lambda_{\nu_1}} x_1 - \cdots - \frac{\lambda_{\nu_1-1}}{\lambda_{\nu_1}} x_{\nu_1-1}\\ - \frac{\lambda_{\nu_1+1}}{\lambda_{\nu_1}} x_{\nu_1+1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_{\nu_1}} x_k,\end{aligned}$$

即

$$x_{\nu_1} \in [x_1, \cdots, x_{\nu_1-1}, y_1, x_{\nu_1+1}, \cdots, x_k].$$

因而　　$[x_1, \cdots, x_k]=[x_1, \cdots, x_{\nu_1-1}, y_1, x_{\nu_1+1}, \cdots, x_k]$.

其次，假如 $h\geqslant 2$, $y_2\in[x_1, \cdots, x_{\nu_1-1}, y_1, x_{\nu_1+1}, \cdots, x_k]$ (y_1, y_2 无关)，那末

$$y_2=\mu_1x_1+\cdots+\mu_{\nu_1-1}x_{\nu_1-1}+\mu_{\nu_1}y_1+\mu_{\nu_1+1}x_{\nu_1+1}+\cdots+\mu_kx_k,$$

因为这里 $\mu_1, \cdots, \mu_{\nu_1-1}, \mu_{\nu_1+1}, \cdots, \mu_k$ 中一定有不是0的，假如 μ_{ν_2} 是其一(計算 μ 的个数，得知 $k-1\geqslant 1$ 即 $k\geqslant 2$)，那末

$$x_{\nu_2}=\frac{1}{\mu_{\nu_2}}y_2-\frac{\mu_1}{\mu_{\nu_2}}x_1-\cdots-\frac{\mu_{\nu_1}}{\mu_{\nu_2}}y_1-\cdots-\frac{\mu_k}{\mu_{\nu_2}}x_k,$$

因而

$$x_{\nu_2}\in[x_1, \cdots, x_{\nu_1-1}, y_1, x_{\nu_1+1}, \cdots, x_{\nu_2-1}, y_2, x_{\nu_2+1}, \cdots, x_k].$$

于是 $[x_1, \cdots, x_k]$ 与右边相等。

当 $k\geqslant 3$ 时继續同样做即得。

系1　$[x_1, \cdots, x_k]$ 中无关的向量的个数不大于 k.

系2　假定 $x_1, \cdots, x_k\in V$ 无关[1]，那末 k 是 $[x_1, \cdots, x_k]$ 中无关向量个数的最大数。

向量空間 V 所含无关向量的个数能够取任意多时(即对于任意給定的自然数 n, V 中有 n 个无关向量存在时) V 叫做**无限維**。假如 V 不是无限維，那末 V 所含无关向量的数有界。因而在个数中有最大数 n. 这时 V 叫做**有限維**，并且称 n 为它的**維数** (dimension)。用記号 $\dim V=n$ 表示。

假如 $\dim V=n$, V 含有 n 个无关元 $x_1, \cdots, x_n$, 因为 V 中任意 $(n+1)$ 个元不是无关，所以假如 x 是 V 中任意元，那末 $x_1, \cdots, x_n$, x 成为相关。因而 $x\in[x_1, \cdots, x_n]$ (例4)。所以 $V=[x_1, \cdots, x_n]$. 即 V 是由 $x_1, \cdots, x_n$ 生成。象 $x_1, \cdots, x_n$ 这样，V 中无关的生成元，叫做 V 的**基底**。——总結以上即得下面定理。

定理5　n 維向量空間有由 n 个向量构成的基底。

---

[1] $x_1, \cdots, x_k\in V$ 无关隐含着 $x_1, \cdots, x_k$ 都不是0，即 $x_1, \cdots, x_k\in V^*$ 之意。

例 5 在 ${}^nK$ 中，$\{{}_1e, {}_2e, \cdots, {}_ne\}$ 成为一个基底。在 K^n 中，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 成为一个基底。它們分别叫做 ${}^nK$, K^n 的**自然基底**。

系 1 n 維向量空間是 n 个 1 維空間的直和。

証明 假定 $\dim V=n$，因为 V 有由 n 个元构成的基底 $x_1, \cdots, x_n$，所以 $V=[x_1, \cdots, x_n]=[x_1]\oplus\cdots\oplus[x_n]$，因为 $[x_i]$ 有由一个元构成的基底，所以它是 1 維的。

系 2 体 K 上 n 維向量空間与 ${}^nK$ 同构。

証明 当 $\dim V=n$ 时，設 V 的基底是 $x_1, \cdots, x_n$，那末 $x\in V$ 可以唯一地写成 $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ 的形状。这时命 $f(x)=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\in{}^nK$，显然 f 是自 V 到 ${}^nK$ 的同构映射。

例 6 ${}^nK\cong K^n$, ${}^1K\cong K^1\cong K$（参照 §3 例 7）。

系 3 假定 W 是 V 的子空間，$\dim V=n$, $\dim W=m$，那末 $n\geqq m$。这时如果 $n=m$，那末 $V=W$。

証明 因为 $\dim V$, $\dim W$ 分别是 V, W 中无关向量的最大个数，显然 $V\supset W\Rightarrow n=\dim V\geqq m=\dim W$。

假定 W 的基底是 $x_1, \cdots, x_m$, $W=[x_1, \cdots, x_m]$，如果 $V\supsetneqq W$，那就有含于 V 而不含于 W 的向量 x_{m+1}，这时 $x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}$ 无关（定理 2, (ii)），所以 $n>m$。

系 4 假定 W 是 V 的子空間，$\dim V=n$, $\dim W=m, n>m$，如果 $x_1, \cdots, x_m$ 是 W 的一个基底，那就可以添加 $n-m$ 个向量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$，使 $x_1, \cdots, x_n$ 成为 V 的基底（由定理 5 及定理 4）。

系 5 在系 4 中，假如 $W'=[x_{m+1}, \cdots, x_n]$，那末 $V=W\oplus W'$。即 V 的任意子空間 W 是 V 的直和因子。

証明 因为 $V\ni x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_mx_m+\lambda_{m+1}x_{m+1}+\cdots+\lambda_nx_n \in W+W'$，所以 $V=W+W'$。又假如 $W\ni y=\mu_1x_1+\cdots+\mu_mx_m$, $W'\ni y'=\mu_{m+1}x_{m+1}+\cdots+\mu_nx_n$，如果 $y+y'=0$，那末 $\mu_1=\cdots=\mu_n=0$，所以 $y=y'=0$。于是 W, W' 无关。因此 $V=W\oplus W'$。（証毕）

假定 W 是 V 的一个子空間，对于 $x, y\in V$，如果 $x-y\in W$，那末 x, y 叫做**关于 mod W 相合**。写成 $x\equiv y(\text{mod } W)$。假如 $x\equiv 0$, $y\equiv 0(\text{mod } W)$，显然 $x+y\equiv 0$, $\lambda x\equiv 0(\text{mod } W)$。

k 个向量 $x_1, \cdots, x_k$ 滿足

$$\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k\equiv 0(\text{mod } W)\Rightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$$

时，叫做**关于 mod W 綫性无关**。

命題 4 假定 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 关于 mod W 綫性无关，那末

(i) 它們綫性无关。

(ii) 它的任意子集合 $\{x_{\nu_1}, \cdots, x_{\nu_k}\}$ 也关于 mod W 綫性无关。

(iii) $x_i\notin W\ (i=1, 2, \cdots, k)$。

証明 由綫性无关及关于 mod W 綫性无关的定义即能容易地証明（今后，容易的証明省略，請讀者作为练习題来考虑）。

定理 6 假定 V 是向量空間，W 是它的子空間，如果 $\dim V=n$, $\dim W=m$，那末 V 中存在 $(n-m)$ 个关于 mod W 綫性无关的向量。

証明 定理 5 系 4 中的 $(n-m)$ 个向量 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 适合这条件。

例 7 假定 W 是 V 的一个固定子空間，那末关于 mod W 的相合关系是等价关系。即 $x\equiv x$; $x\equiv y\Rightarrow y\equiv x$; $x\equiv y$, $y\equiv z\Rightarrow x\equiv z$（在这些"相合式"中都把 mod W 省略）。当 $x\equiv y$ 时，x 关于 mod W 的**相合类**与 y 关于 mod W 的相合类叫做相同。x 关于 mod W 的相合类用 $(x)_W$ 或簡略地用 (x) 表示。因为 $x\equiv x'$, $y\equiv y'\Rightarrow x+y\equiv x'+y'$, $\lambda x\equiv\lambda x'$，所以由 $(x+y)=(x)+(y)$, $(\lambda x)=\lambda(x)$ 能够定义相合类的和及数量倍。假如这样定义，那末相合类就成为 K 上向量空間。它叫做 V 关于 mod W 的**商空間**，用 V/W 表示。特别，如果 $\dim V=n$, $\dim W=m$，那末 $\dim V/W=n-m$（定理 6 的証明中 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 的相合类 $(x_{m+1}), \cdots, (x_n)$ 构成 V/W 的基底）。

§6 关于映射

作为 §2 的继續，在这里就**映射**或**对应**的概念及記法給予一

般的說明。

讀者想已知道象下面这样关于"函数"的定义。

"对于 x 的各个值，对应的 y 值确定时，y 叫做 x 的函数，写成 $y=f(x)$."

象这样說时，x,y 当然认为是表示"数"，所謂"数"就意味是普通实数(用我們的記法 $x,y\in \boldsymbol{R}$)。依照函数 f, $f(x)$ 不一定定义于所有的实数(例如 $\sqrt{x}$ 限于在实数范圍內考虑时只有当 $x\geqslant 0$ 时才有定义)。于是 $f(x)$ 定义于某 x 的集合，这样的集合叫做 f 的**定义域**(domain)，对于定义域是 D 的函数 f，称 $R=\{f(x); x\in D\}$ 为 f 的**值域**(range)。也有对于 x 的一个值确定两个以上 $f(x)$ 的值的函数(象 $f(x)=\pm\sqrt{x}$)称为**多值函数**。但今后为了簡单，只說函数时总是意味**单值函数**(不是多值的，卽对于 x 的一个值，只确定一个唯一的 $f(x)$ 的值)。

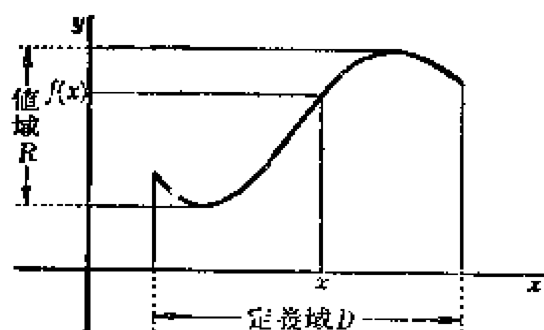


图 6.1

于 §2 中已注意到，在我們的代数学中文字不一定表示数，并且还說过，代数学的对象是具有某种代数結构的集合，卽代数系。因此現在开始来考虑完全一般的集合。

假定 M_1, M_2 是两集合，如果对于 M_1 中各个元 x，可以确定出 M_2 中元 y，这时，我們就說給定了自 M_1 到 M_2 的**映射或对应**。这映射或对应用 f 表示时，对于 $x\in M_1$ 所确定(也叫做"对应"于 x)的 M_2 中元 y 就用 $f(x)$ 表示。

在微积分学中所討論的函数都是自 $M_1=\boldsymbol{R}$ 到 $M_2=\boldsymbol{R}$ 的映射(在复数函数論中考虑 $M_1=M_2=\boldsymbol{C}$ 的情况)。在一般集合情况也有仍旧使用函数这个名詞来代替映射或对应的，但我們将以使用映射这个名詞为主。

与函数的情况同样，也考虑"多值映射"。但当我們单說映射时，則規定是单值映射，即对于各个 $x \in M_1$，$f(x)$ 是唯一确定的。又关于映射，也考虑定义域 $D \subset M_1$ 及值域 $R \subset M_2$ 的情况，但自"M_1 到 M_2 的映射 f"，如果不預先声明，我們規定 $D = M_1$，

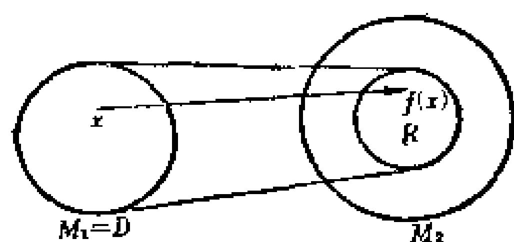


图 6.2

即 $f(x)$ 定义于 M_1 中所有元。然而常常不規定 $R = M_2$。特别，当 $R = M_2$ 时，f 叫做(自 M_1)**映成 M_2 的映射**或到 M_2 的**全射**。为了表示 f 不一定是全射，常称它做(自 M_1)**映入 M_2 中的映射**。

例 1 假定 y_0 是 M_2 中一元，对于 M_1 中任意元 x，如果規定 $f(x) = y_0$，那就得到自 M_1 到 M_2 的一个映射。它叫做以 y_0 为値的**常数映射**。当 M_2 有两个以上之元时，它就不是全射。

例 2 假定 $M_1 = M_2 = M$，对于 M 中各个元 x 如果使与 x 自身对应，那就得到自 M 到 M 自身的映射。它叫做关于 M 的**恒等映射**用 e_M 表示。$e_M(x) = x$，恒等映射是全射。

当 $M_1 \supset M_1'$ 时，$\{f(x); x \in M_1'\}$ 是 M_2(詳細点說是 R)的子集合，写成 $f(M_1')$，叫做 M_1' 关于 f 的**象**。($f(x)$ 也叫做 x 的象，只由一个元构成的集合与这元自身常不加区别。) 又 $M_2 \supset M_2'$ 时，$\{x; f(x) \in M_2'\}$ 是 M_1 的子集合，写成 $f^{-1}(M_2')$，叫做 M_2' 的**原象**。对于 $y \in M_2$，$f^{-1}(\{y\})$ ($\{y\}$ 与 y 不加区别) 写成 $f^{-1}(y)$，也叫做 y 的原象。$f(x)$ 是 M_2 中元，但 $f^{-1}(y)$ 不是 M_1 中元而是 M_1 的子集合。假定 $M_2 \neq R$，如果 $y \in M_2 - R$，那末 $f^{-1}(y) = \emptyset$。对于 $y \in R$，$f^{-1}(y) \neq \emptyset$，假如对于 R 中任意元 y，如果 $f^{-1}(y)$ 总是只由一个元构成时，那末 f 叫做**一对一的映射**或**单射**。假如 $f^{-1}(y) = \{x\}$，显然 $f(x) = y$。于是 $f^{-1}(y) = \{x\}$ 时，如果写成 $f^{-1}(y) = x$，那末当 f 是单射时，f^{-1} 就是自 R 到 M_1 的全射。假如 f 是全射

同时又是单射，那末 f 叫做**全单射**。

例 3 M_1 是由有限个元构成时，假定有自 M_1 到 M_2 的全单射，那末 M_2 是由相同个数的元所构成。

例 4 $M_1\supset M_1'\supset M_1''\Rightarrow R=f(M_1)\supset f(M_1')\supset f(M_1'')$.

$M_2\supset M_2'\supset M_2''\Rightarrow M_1=f^{-1}(M_2)\supset f^{-1}(M_2')\supset f^{-1}(M_2'')$.

例 5 $M_2\supset M_2'\Rightarrow f^{-1}(M_2')=f^{-1}(M_2'\cap R)$.

例 6 $M_1\supset M_1'\Rightarrow f^{-1}(f(M_1'))\supset M_1'$❶.

例 7 $M_2\supset M_2'\Rightarrow f(f^{-1}(M_2'))=M_2'$.

設 f 是自 M_1 到 M_2 的映射，当 $M_1'\subset M_1$ 时，如果对于 $x\in M_1'$，使 $f(x)\in M_2$ 与之对应，就得到自 M_1' 到 M_2 的映射。这映射叫做 f 到 M_1' 的**縮小**，用 $f|M_1'$ 表示。与这相对，f 有时叫做 $f|M_1'$ 到 M_1 的**扩大**。显然由 f 能够确定 $f|M_1'$，但是由 $f|M_1'$ 一般就不能确定 f。即当 $M_1\supset M_1'$，$M_1\neq M_1'$ 时，纵然 $f\neq g$，也可能有 $f|M_1'=g|M_1'$。当 $M_1=M_1'\cup M_1''$ 时，假如給定了 $f|M_1'$ 及 $f|M_1''$，那末 f 就确定了。这些考虑在定义映射时或探求它的性质时将一再利用。

把自 M_1 到 M_2 的映射 f 表示为

$$f:M_1\longrightarrow M_2 \quad \text{或} \quad M_1\xrightarrow{f}M_2.$$

$f,g:M_1\longrightarrow M_2$ 意味着两个都是自 M_1 到 M_2 的映射。所謂 f,g 是相同映射（$f=g$），当然是意味着对任意 $x\in M_1$ 有 $f(x)=g(x)$。

假如 $$f_1:M_1\longrightarrow M_2,\quad f_2:M_2\longrightarrow M_3,$$

或 $$M_1\xrightarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}M_3,$$

对于 $x\in M_1$ 使与 $f_2(f_1(x))\in M_3$ 对应，就得到自 M_1 到 M_3 的映射。用 $f_2\circ f_1$ 或簡略地用 f_2f_1 表示。即

$$f_2\circ f_1(x)=f_2f_1(x)=f_2(f_1(x)).$$

---

❶ 因为 $f(M_1')$ 是 M_1' 关于 f 的象，$f^{-1}(f(M_1'))$ 是 $f(M_1')$ 的原象，显然它包含 M_1' 而被 M_1 包含，即 $M_1\supset f^{-1}(f(M_1'))\supset M_1'$. ——譯者注

这 $f_2\circ f_1$ 叫做映射 f_1, f_2 的**褶合**。再由

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} M_4,$$

就得到自 M_1 到 M_4 的映射 $f_3\circ(f_2\circ f_1)$ 及 $(f_3\circ f_2)\circ f_1$. 关于此,有

$$f_3\circ(f_2\circ f_1)=(f_3\circ f_2)\circ f_1.$$

实际上,这两边相等是意味着对于任意 $x\in M_1$,

$$(f_3\circ(f_2\circ f_1))(x)=((f_3\circ f_2)\circ f_1)(x),$$

这两边显然都等于 $f_3(f_2(f_1(x)))$. 这結果虽簡单但很重要, 故特列为下述定理。

定理 7 对于映射的褶合,結合律成立。

例 8 $f:M_1\longrightarrow M_2$ 时, $f\circ e_{M_1}=f$, $e_{M_2}\circ f=f$.

例 9 假定 $f:M_1\longrightarrow M_2$ 是全单射,那末 $f^{-1}:M_2\longrightarrow M_1$ 并且 $f^{-1}\circ f=e_{M_1}$, $f\circ f^{-1}=e_{M_2}$.

例 10 假定在 $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ 中, $f_2\circ f_1=e_{M_1}$, $f_1\circ f_2=e_{M_2}$, 那末 f_1, f_2 都是全单射❶。

§7 綫性映射

在前节是叙述完全一般集合間的映射, 但是考虑代数系間的映射时,当然就要涉及到它的代数結构。

例如 A_1, A_2 是具有相同基本运算的代数系,并且在基本运算中有用"+"表示的加法。設 $f:A_1\longrightarrow A_2$, 对于 A_1 的任意两元 x, y,如果 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 那末 f 叫做"保持加法"。保持所有基本运算的映射叫做**同态映射**。同态映射又是全单射时,就叫做**同构映射**。假如有自 A_1 到 A_2 的同构映射, 那末 A_1 与 A_2 叫做同构。这事实都已在 §4 叙述过。

---

❶ 首先 f_1, f_2 都是全射,这是因为假如 y 是 M_2 中任意元,因为 $f_1f_2=e_{M_2}$, 所以 $y\to f_2(y)\to f_1(f_2(y))=y$, 即 y 是 M_1 中元 $f_2(y)$ 的象,所以 f_1 是全射。同样 f_2 也是全射。再假如 $x_1, x_2\in M_1$, $f_1(x_1)=f_1(x_2)$, 那末 $f_2f_1(x_1)=f_2f_1(x_2)$, 即 $x_1=x_2$. 所以 f_1, f_2 都是单射。——譯者注

所謂**綫性映射**,不外是向量空間之間的同态映射。設 V_1, V_2 是同一个体 K 上的兩向量空間, f 是自 V_1 到 V_2 的映射,这时对于 V_1 的任意元 x, y 及 K 的任意元 λ, 如果

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \tag{7.1}$$

$$f(\lambda x)=\lambda f(x) \tag{7.2}$$

成立,那末 f 叫做自 V_1 到 V_2 的綫性映射❶。自 V_1 到 V_2 的綫性映射全体的集合用 $\mathfrak{L}(V_1, V_2)$ 表示。

例 1 向量空間 V_1 的恒等映射 e_{V_1} 是自 V_1 到它自身的綫性映射(实际是同构映射): $e_{V_1}\in\mathfrak{L}(V_1, V_1)$.

例 2 把 V_1 中任意元对应于 V_2 中元 0 的常数映射是 $\mathfrak{L}(V_1, V_2)$ 中元,这映射記为 O_{V_1,V_2} 或簡記为 O.

例 3 对于 ${}^nK$ 中元 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $\xi_i\in K$, 使它的第一坐标 ξ_1 对应的映射是 $\mathfrak{L}({}^nK, {}^1K)$ 中元。这映射叫做"第一坐标上的**射影**"。同样,对于 $i=2, 3, \cdots, n$ 定义"第 i 坐标上的射影"。这些都是 $\mathfrak{L}({}^nK, {}^1K)$ 中元。

例 4 假定 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$, 那末 $x\in V$ 能够唯一地写成 $x_1+\cdots+x_k$, $x_i\in W_i$ 的形式,这时,对于 x,使与 x_i 对应的映射叫做自 V 到 W_i 的**射影**。它是 $\mathfrak{L}(V, W_i)$ 中元(例 3 是它的特殊情况)。

例 5 W 是 V 的子空間时, 对于 $x\in V$, 使与 $(x)_W$ (x 关于 mod W 的相合类, §5, 例 7) 对应的映射叫做自 V 到商空間 V/W 的**自然映射**。它是 $\mathfrak{L}(V, V/W)$ 中元。

例 6 假定 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是 $(12\cdots n)$ 的一个**排列**(例如 $n=3$ 时, $(\nu_1\nu_2\nu_3)=(312)$ 等)。这时对于 K^n 中元 $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$, 使与 $\begin{pmatrix}\xi_{\nu_1}\\ \vdots\\ \xi_{\nu_n}\end{pmatrix}$ 对应的映射用 $\pi(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 表示,它是 $\mathfrak{L}(K^n, K^n)$ 中元。特别, $\pi(12\cdots n)=e_{K^n}$.

例 7 对于 $f\in\mathfrak{C}^1([a, b], \boldsymbol{R})$, 使与它的导函数 $f'\in\mathfrak{C}^0([a, b], \boldsymbol{R})$ 对应的映射 D 是自向量空間 $\mathfrak{C}^1$ 到向量空間 $\mathfrak{C}^0$ 的綫性映射, $Df=f'$, $D\in\mathfrak{L}(\mathfrak{C}^1, \mathfrak{C}^0)$.

---

❶ 綫性映射又叫做綫性作用素,綫性运算子,綫性算子。特别,体 K 的綫性映射也叫做綫性泛函。

一般，对于 $f\in\mathfrak{C}^n([a,b],\boldsymbol{R})$，使与它的第 k ($k\leqslant n$)阶导函数 $f^{(k)}\in\mathfrak{C}^0([a,b],\boldsymbol{R})$ 对应的映射用褶合映射的記法写成 $\underbrace{D\circ D\circ\cdots\circ D}_{(k\text{个})}$，簡記为 D^k. 显然 $D^k\in\mathfrak{L}(\mathfrak{C}^n,\mathfrak{C}^0)$ ($k\leqslant n$).

又当 $k\leqslant n$, $p_1,p_2,\cdots,p_k\in\mathfrak{C}^0$ 时，由 $\Lambda f=D^kf+p_1D^{k-1}f+\cdots+p_{k-1}Df+p_kf$ 定义的映射 $\Lambda\in\mathfrak{L}(\mathfrak{C}^n,\mathfrak{C}^0)$. 这 Λ 表为 $\Lambda=D^k+p_1D^{k-1}+\cdots+p_{k-1}D+p_k$.

例 8　对于 $f\in\mathfrak{C}^0([a,b],\boldsymbol{R})$，使与 $\int_a^b f(x)\,dx\in\boldsymbol{R}$ 对应的映射 I 是自向量空間 $\mathfrak{C}^0$ 到向量空間 $\boldsymbol{R}$ 的綫性映射(綫性泛函)

$$If=\int_a^b f(x)\,dx,\quad I\in\mathfrak{L}(\mathfrak{C}^0,\boldsymbol{R}).$$

关于綫性映射，下面的定理成立。

定理 8　假定 f 是自向量空間 V_1 到 V_2 的綫性映射，V_1' 是 V_1 的子空間，V_2' 是 V_2 的子空間，那末 $f(V_1')$ 是 V_2 的子空間，$f^{-1}(V_2')$ 是 V_1 的子空間。

設 V_1, V_2 的子空間的集合分别用 $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ 表示，那末

$$\mathfrak{V}_1\ni V_1'\Rightarrow f(V_1')\in\mathfrak{V}_2,\tag{7.3}$$

$$\mathfrak{V}_2\ni V_2'\Rightarrow f^{-1}(V_2')\in\mathfrak{V}_1.\tag{7.4}$$

这意味着 $f:\mathfrak{V}_1\to\mathfrak{V}_2$, $f^{-1}:\mathfrak{V}_2\to\mathfrak{V}_1$. 特别，$f(V_1)\in\mathfrak{V}_2$, $f^{-1}(0)\in\mathfrak{V}_1$.

証明　要証明 (7.3)，只要証明 $f(V_1')\ni x',\ y'\Rightarrow x'+y'$, $\lambda x'\in f(V_1')$ 即可。由 $f(V_1')$ 的定义，存在 $x'=f(x)$, $y'=f(y)$, $x,y\in V_1'$ 这样的 x, y. 因为 $V_1'\in\mathfrak{V}_1$，所以 $x+y$, $\lambda x\in V_1'$. 又因为 $f\in\mathfrak{L}(V_1,V_2)$，所以 $x'+y'=f(x)+f(y)=f(x+y)\in f(V_1')$, $\lambda x'=\lambda f(x)=f(\lambda x)\in f(V_1')$. (7.4) 可同样地証明。

例 9　假定例 7 中的映射是 D，那末 $\Lambda=D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_n\in\mathfrak{L}(\mathfrak{C}^n,\mathfrak{C}^0)$. 对于 $\mathfrak{C}^0$ 的 0 向量($f(x)\equiv0$ 这样的函数 f)，$\Lambda^{-1}(0)$ 成为 $\mathfrak{C}^n$ 的子空間，即 n 阶綫性微分方程

$$(D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_n)f=\frac{d^nf}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}+\cdots+p_nf=0$$

的解集合是 $\mathfrak{C}^n$ 的子空間。

对于 $f, g\in\mathfrak{L}(V_1,V_2)$ 及 $\lambda\in K$，定义 $f+g,\lambda f$ 如下：$f+g$ 是使 V_1 的元 x 与 V_2 的元 $f(x)+g(x)$ 对应的映射，即

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

而 λf 是使 V_1 的元 x 与 V_2 的元 $\lambda f(x)$ 对应的映射，即

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x).$$

命題 5 对于上面定义的加法及数量积，$\mathfrak{L}(V_1, V_2)$ 成为 K 上向量空間。

証明 証明 §3 中条件 A, B 在现在的情况下成立即可。例如 A1 可象下面这样来証明：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x),$$

因为它对于任意 $x\in V_1$ 成立，所以 $f+g=g+f$. 对于 A2～5, B1～5 也可同样驗証。特别，$\mathfrak{L}(V_1, V_2)$ 中零元是以 0 为值的常数映射。

命題 6 假定 $f\in\mathfrak{L}(V_1, V_2)$，$g\in\mathfrak{L}(V_2, V_3)$，那末 $g\circ f\in\mathfrak{L}(V_1, V_3)$.

証明 显然 $g\circ f$ 是自 V_1 到 V_3 的映射。由下面的关系即知它是綫性映射。

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+y)&=g(f(x+y))=g(f(x)+f(y))\\&=g(f(x))+g(f(y))\\&=(g\circ f)(x)+(g\circ f)(y),\\(g\circ f)(\lambda x)&=g(f(\lambda x))=g(\lambda f(x))\\&=\lambda g(f(x))=\lambda(g\circ f)(x).\end{aligned}$$

命題 7 假定 $f, f_1, f_2\in\mathfrak{L}(V_1, V_2)$, $g, g_1, g_2\in\mathfrak{L}(V_2, V_3)$，那末

$$g\circ(f_1+f_2)=(g\circ f_1)+(g\circ f_2), \tag{7.5}$$

$$(g_1+g_2)\circ f=(g_1\circ f)+(g_2\circ f). \tag{7.6}$$

証明 对于任意 $x\in V_1$，

$$\begin{aligned}(g\circ(f_1+f_2))(x)&=g((f_1+f_2)(x))\\&=g(f_1(x)+f_2(x))\\&=(g\circ f_1)(x)+(g\circ f_2)(x)\\&=(g\circ f_1+g\circ f_2)(x),\end{aligned}$$

所以(7.5)成立。(7.6)能够同样証明。　　（証毕）

在命題5, 6, 7中假如考虑$V_1=V_2=V_3=V$的特殊情况，那末，$\mathfrak{L}(V, V)$是K上向量空間，对于其中任意两元f, g, $g\circ f\in\mathfrak{L}(V, V)$．并且关于它的耦合及加法，下面两个分配律

$$h\circ(f+g)=h\circ f+h\circ g,$$

$$(f+g)\circ h=f\circ h+g\circ h\ (f, g, h\in\mathfrak{L}(V, V))$$

成立。再对于任意$\lambda\in K$，显然

$$\lambda(g\circ f)=(\lambda g)\circ f=g\circ(\lambda f).$$

一般，在加群S中任意两元x, y之間定义异于"+"的算法"$\circ$"而$x\circ y\in S$，当

結合律　　$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$,

及分配律　　$(x+y)\circ z=x\circ z+y\circ z$,

$$z\circ(x+y)=z\circ x+z\circ y$$

成立时，S叫做关于"+, $\circ$"成为环。在环S中，若更有

交换律　　$x\circ y=y\circ x$,

则S就叫做**可换环**。$x\circ y$总是作为"乘法"，表为xy的形状。可换环不外是加減乘法能够如常施行的集合(在§3定义的体，也可以說是"除法也能够如常施行的可换环")。

体K上向量空間U当然是加群，但U如果是环，并且对于任意$\lambda\in K$, $x, y\in U$,

$$\lambda(xy)=(\lambda x)y=x(\lambda y)$$

成立时，则U叫做K**上代数**。

引用这定义，上面所考察的事实可表达如次：

命題 8 如果 V 是 K 上向量空間，則 $\mathfrak{L}(V, V)$ 是 K 上代数。

以后将 $\mathfrak{L}(V, V)$ 写成 $\mathfrak{L}(V)$。$\mathfrak{L}(V)$ 中元也叫做 V 的**綫性变換**。

例 10 整数全体的集合 $\{\pm n\}$，偶数全体的集合 $\{\pm 2n\}$，一般整数 k 的倍数全体的集合 $\{\pm kn\}$，按普通的加法乘法都成为环。上面两个环分别叫做**整数环与偶数环**。

例 11 在环中，对于任意元 x，使 $ex=xe=x$ 这样的元 e（**单位元**）不一定存在，但是假如存在，那就只有一个。

1 是整数环的单位元，偶数环的单位元不存在。在 $\mathfrak{L}(V)$ 中，恒等映射 e_V 是单位元。

例 12 在有单位元 e 的环中，对于任意元 x，象 $xx^{-1}=x^{-1}x=e$ 这样的元 x^{-1}（x 的**逆元**）不一定存在，但如果存在，那它对于 x 是唯一确定的（更詳細地說：在 $xx'=e$ 中，如果存在 x 的逆元，那末 x' 就是 x 的逆元）。在整数环，对于异于 1 的元，逆元不存在。在 $\mathfrak{L}(V)$，仅当 $f\in\mathfrak{L}(V)$ 是全单射时，f 的逆元存在，f^{-1} 是它的逆元。

例 13 C 是以 $1,\ i=\sqrt{-1}$ 做基底的 R 上二維向量空間，并且是代数。（R 自身当然是 R 上代数。一般，体 K 自身可以看成 K 上代数。）

例 14 假定 K 是体，${}^4K$ 的基底用 $\{1, i, j, k\}$ 表示，在 ${}^4K$ 中元之間由下列关系定义乘法：

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j.$$

一般，当 $a=\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k,\ b=\beta_0+\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k\ (\alpha_i,\ \beta_i\in K)$ 时，

$$ab=(\alpha_0\beta_0-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3)+(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)i$$
$$+(\alpha_0\beta_2+\alpha_2\beta_0+\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)j+(\alpha_0\beta_3+\alpha_3\beta_0+\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)k,$$

那末 ${}^4K$ 成为代数。这样的代数用 $Q(K)$ 表示，叫做体 K 上**四元数环**（quatunion algebra）。在 $Q(K)$ 中，$1=1+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$ 是单位元。

在 $Q(K)$ 的元 $\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$ 中，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ 全体的集合关于加法乘法是与体 K 同构。因此，假如把 $\alpha_0+0i+0j+0k\in Q(K)$ 与 $\alpha_0\in K$"同样看待"，那就可以认为 $Q(K)\supset K$。

对于 $a=\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k\in Q(K)$，叫 $\bar{a}=\alpha_0-\alpha_1 i-\alpha_2 j-\alpha_3 k$ 做 a 的**共軛元**。由上面乘法定义，容易得知

$$a\bar{a}=\bar{a}a=\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\in K\text{（在上述的意义）。}$$

特别，假定 $K=\boldsymbol{R}$ 而考虑 $Q(\boldsymbol{R})$，显然 $a=0\Rightarrow a\bar{a}=0$。因此，如果 $a\neq 0$，那末 $\frac{\bar{a}}{a\bar{a}}\in Q(K)$，$\frac{\bar{a}}{a\bar{a}}\cdot a=a\cdot\frac{\bar{a}}{a\bar{a}}=1$，即 $\frac{\bar{a}}{a\bar{a}}$ 是 a 的逆元 a^{-1}。于是 $Q(\boldsymbol{R})$ 除乘法的交换律之外滿足体的公理，象这样的体，叫做**非可換体**（在較广泛的意义下，也有把非可换体包含在内而統称为"体"的）。

代数成为体时，叫做**可除代数。**$\boldsymbol{R}$ 上可除代数已知只有 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$，$Q(\boldsymbol{R})$ 三个（Frobenius 定理）❶。

§8 矩陣表現

本节討論有限維向量空間，假定 $\dim V_1=n$，$\dim V_2=m$。

由§5定理5，V_1 具有由 n 个元构成的基底 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，而 V_1 中每个元 x 能够唯一地表为 $\xi_1a_1+\cdots+\xi_na_n$，$\xi_i\in K$ 的形状。假如对于 x，使 K^n 中元 $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$ 与之对应，就得到自 V_1 到 K^n 的同构映射。这同构映射用 φ 表示，即

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},$$

$\varphi(x)$ 叫做 x 关于基底 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的**坐标**。在有必要表明基底时，把 φ 写成 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$。$\varphi$ 叫做关于基底 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的**坐标系**。同样，假定 V_2 的一个基底是 $b_1, \cdots, b_m$，由它确定的 V_2 的坐标系用 ψ 表示。

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \varphi\downarrow\uparrow\varphi^{-1} & & \downarrow\psi \\ K^n & \xrightarrow[F]{} & K^m \end{array}$$

現在假定 $f\in\mathfrak{L}(V_1, V_2)$，由前节命題6，

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in\mathfrak{L}(K^n, K^m).$$

它是自 K^n 到 K^m 的映射，用 F 表示。下面我們来考虑 F 具体的表現。

---

❶ 参閱 A. Г. 庫洛什著"高等代数教程"，柯召譯，高等教育出版社出版，§58。——譯者注

假定 K^n 的自然基底(§6 例 5)是 $e_1, e_2, \cdots, e_n$. K^n 中一般元 $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$ 等于 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$. 由自然基底所确定的 K^n 的坐标系叫做**自然坐标系**,用 φ_0 表示。

$$F\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=F\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k F(e_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\psi(f(\varphi^{-1}(e_k))),$$

由 φ 的意义,显然 $\varphi(a_k)=e_k$, $\varphi^{-1}(e_k)=a_k$, 因此,上式右边成为 $\sum_{k=1}^{n}\xi_k\psi(f(a_k))$. 現在假定 $\psi(f(a_k))$, 即 $f(a_k)$ 关于 $(b_1, \cdots, b_m)$ 的坐标是

$$\psi(f(a_k))=\begin{pmatrix}\alpha_{1k}\\ \alpha_{2k}\\ \vdots\\ \alpha_{mk}\end{pmatrix},\quad \alpha_{ik}\in K, \tag{8.1}$$

那末

$$F\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\begin{pmatrix}\alpha_{1k}\\ \alpha_{2k}\\ \vdots\\ \alpha_{mk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{1k}\xi_k\\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_{2k}\xi_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_{mk}\xi_k\end{pmatrix},$$

即設

$$F\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix}(f(x)\text{ 关于 }(b_1, \cdots, b_m)\text{ 的坐标}), \tag{8.2}$$

那末

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m). \tag{8.3}$$

于是 F 的具体形状，可以用把(8.1)的 n 个 m 維纵向量横排成表

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ik} & \cdots & \alpha_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mk} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ik}\in K \tag{8.4}$$

来給出，因此(8.2)可表为

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}\alpha_{1k}\xi_k \\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_{2k}\xi_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_{mk}\xi_k \end{pmatrix}.$$

象(8.4)这种由 K 中元形成的表叫做 K 中 (m,n) 型**矩陣**，行向量 $(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \cdots,\ \alpha_{in})$ 叫做它的**第 i 行**。(8.1)的右边的列向量叫做它的**第 k 列**，α_{ik} 叫做它的 **$(i,\ k)$ 元素**。特别，$m=n$ 的矩陣叫做 n 級**方陣**。在方陣 (α_{ik}) 中，$\alpha_{11},\ \alpha_{22},\ \cdots,\ \alpha_{nn}$ 叫做**主对角綫元素**。又矩陣也常常用一个文字表示，写成

$$F=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ 或 } F=(\alpha_{ik})_{m,n}.$$

两矩陣 $F=(\alpha_{ik})_{m,n}$，$G=(\beta_{ik})_{m',n'}$，当 $m=m'$，$n=n'$，$\alpha_{ik}=\beta_{ik}(i=1,\ \cdots,\ m,\ k=1,\ \cdots,\ n)$ 时，且限于这时叫做相等。

例 1 K^n 的第一坐标上的射影，如果采取自然坐标可以用 $(1, n)$ 型矩陣 $(1, 0, 0, \cdots, 0)$ 表示。

例 2 在前节例6 中的 $\pi(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$，如果采取 K^n 的自然坐标可以用 $(1, \nu_1)$，$(2, \nu_2)$，$\cdots$，(n, ν_n) 的各元素是1，而其他元素都是0的矩陣表示。这矩陣記为 $P(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$，例如❶

$$P(3, 1, 2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

特别，$P(1, 2, \cdots, n)=(\delta_{ik})$，但 $\delta_{ik}=\begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$，$\delta_{ik}$ 叫做 **Kronecker** 的 δ-函数。(δ_{ik}) 叫做 n 級**单位矩陣**，用 E_n（或簡略地用 E）表示。

其次，考虑与前节中所討論的綫性映射間算法对应的矩陣間的算法。

K 中元构成的 (m, n) 型矩陣全体的集合用 $\mathfrak{M}(m, n; K)$ 表示。由上述方法，对于任意 $f \in \mathfrak{L}(V_1, V_2)$，对应一个 $F \in \mathfrak{M}(m, n; K)$。（这里固定 V_1，V_2 的坐标系 φ_1，φ_2，以下暂时把 $\mathfrak{L}(V_1, V_2)$，$\mathfrak{M}(m, n; K)$ 分别略記为 $\mathfrak{L}$，$\mathfrak{M}$。）反之，对于任意

$$G=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M},$$

只有一个 $g \in \mathfrak{L}$ 存在，适合

---

❶ 这时 $\pi(3, 1, 2)$，因为 $\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\xi_3 e_3=\xi_3 e_3+\xi_1 e_1+\xi_2 e_2$，于是

$$f(e_1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_2)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_3)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$F=f=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

——譯者注

$$\psi(g(a_k))=\begin{pmatrix}\beta_{1k}\\ \vdots\\ \beta_{mk}\end{pmatrix}, \text{即 } g(a_k)=\psi^{-1}\begin{pmatrix}\beta_{1k}\\ \vdots\\ \beta_{mk}\end{pmatrix},$$

$$k=1, \cdots, n. \tag{8.5}$$

实际上,根据(8.5),对于任意 $x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k a_k\in V_1$, $g(x)$ 由

$$g(x)=g\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k g(a_k),$$

确定,这样定义的 g 易知是綫性映射。

于是,上述的 $\mathfrak{L}$ 与 $\mathfrak{M}$ 之間的对应是一对一的。根据这对应,当 $f\leftrightarrow F=(\alpha_{ik})$, $g\leftrightarrow G=(\beta_{ik})$ 时, $f+g$, $\lambda f\in\mathfrak{L}$ 与 $\mathfrak{M}$ 中怎样的矩陣对应?

关于这,假定

$$\psi\circ f(a_k)=\begin{pmatrix}\alpha_{1k}\\ \vdots\\ \alpha_{mk}\end{pmatrix},\quad \psi\circ g(a_k)=\begin{pmatrix}\beta_{1k}\\ \vdots\\ \beta_{mk}\end{pmatrix}, k=1, 2, \cdots, n,$$

考虑 $(\psi\circ(f+g))(a_k)$, $(\psi\circ(\lambda f))(a_k)$ 即可。因为

$$(\psi\circ(f+g))(a_k)=\psi(f(a_k))+\psi(g(a_k))$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_{1k}+\beta_{1k}\\ \vdots\\ \alpha_{mk}+\beta_{mk}\end{pmatrix},$$

$$(\psi\circ(\lambda f))(a_k)=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_{1k}\\ \vdots\\ \lambda\alpha_{mk}\end{pmatrix},$$

所以

$$\psi(f+g)\varphi^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn}\end{pmatrix}$$
$$=(\alpha_{ik}+\beta_{ik}),$$

$$\psi(\lambda f)\varphi^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda\alpha_{m1} & \cdots & \lambda\alpha_{mn}\end{pmatrix}=(\lambda\alpha_{ik}).$$

特别,假如 $\lambda=0$,那末

$$\psi\circ 0\circ\varphi^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

当 $F=(\alpha_{ik})$, $G=(\beta_{ik})$ 时, $(\alpha_{ik}+\beta_{ik})$ 写成 $F+G$, $(\lambda\alpha_{ik})$ 写成 λF. 又所有元素是 0 的 (m, n) 型矩陣用 O_{mn}(或 O)表示,叫做((m, n) 型的)**零矩陣**。

假定 $\mathfrak{M}$ 的元之間的加法及数量积象上面那样定义,因为 $\mathfrak{L}$ 与 $\mathfrak{M}$ 之間的对应保存加法及数量积,所以 $\mathfrak{M}$ 成为与 $\mathfrak{L}$ 同构的体 K 上向量空間。O_{mn} 显然是 $\mathfrak{M}$ 的零元。

命題 9 $\mathfrak{L}(V_1, V_2)\cong\mathfrak{M}(m, n; K)$.

命題 10 假定 $\dim V_1=n$, $\dim V_2=m$, 那末 $\dim\mathfrak{L}(V_1, V_2)=mn$.

証明 只要能够証明 $\dim\mathfrak{M}(m, n; K)=mn$ 即可。假定 E_{ik} 只是 (i, k) 元素是 1,其他元素都是 0 的 (m, n) 型矩陣,因为 mn 个矩陣 E_{11}, E_{12}, E_{13}, $\cdots$, E_{mn},根据定理 2 (i)是无关的,并且 M 中任意元能够表为它們的綫性組合,所以它們成为 M 的基底。因此 $\dim\mathfrak{M}(m, n; K)=mn$.

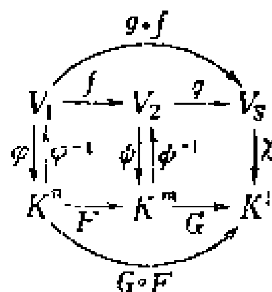
例 3 假定 $V_1=V_2=V$, $\varphi=\psi$, $\dim V=n$, 那末 $\mathfrak{L}(V)\cong\mathfrak{M}(n, n; K)$, $\dim\mathfrak{L}(V)=n^2$. 在这同构对应中对应于 $\mathfrak{L}(V)$ 的恒等映射 e_V 的矩陣是 n 次单位矩陣 E_n.

再来看:对于映射的褶合,对应的又是怎样的矩陣? 假定 $\dim V_1=n$, $\dim V_2=m$, $\dim V_3=l$, 則

$$\mathfrak{L}(V_1, V_2) \ni f \leftrightarrow F = (\alpha_{ik}) \in \mathfrak{M}(m, n; K),$$
$$\mathfrak{L}(V_2, V_3) \ni g \leftrightarrow G = (\beta_{ik}) \in \mathfrak{M}(l, m; K).$$

如果V_1, V_2, V_3的坐标系分别为φ, ψ, χ，那末

$$\chi((g\circ f)(a_k)) = \chi(g(f(a_k)))$$
$$= \chi\left(g\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{jk}b_j\right)\right)$$
$$= \chi\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{jk}g(b_j)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\alpha_{jk}\chi(g(b_j))$$



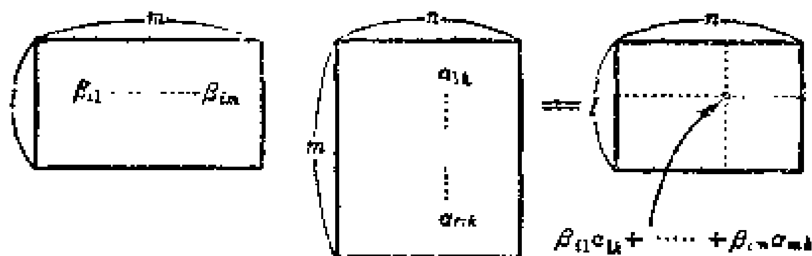
$$= \sum_{j=1}^{m}\alpha_{jk}\begin{pmatrix}\beta_{1j}\\ \vdots \\ \beta_{lj}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{m}\beta_{1j}\alpha_{jk}\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m}\beta_{lj}\alpha_{jk}\end{pmatrix}, \quad k=1, 2, \cdots, n.$$

因此

$$\chi(g\circ f)\varphi^{-1} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{m}\beta_{1j}\alpha_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m}\beta_{1j}\alpha_{jn}\\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m}\beta_{lj}\alpha_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m}\beta_{lj}\alpha_{jn}\end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\alpha_{jk}\right),$$

这矩陣叫做$G=(\beta_{ik})$, $F=(\alpha_{ik})$的**积**，写成GF.

矩陣的积只有第一个矩陣的列数与第二个矩陣的行数相等时才能定义。积的第(i, k)元素是第一个矩陣中第i行的元素与第二个矩陣中第k列的元素順次相乘的和。



命题 11 当 $F, F_1, F_2 \in \mathfrak{L}(m, n; K)$，$G, G_1, G_2 \in \mathfrak{M}(l, m; K)$ 时，

$$G(F_1+F_2)=GF_1+GF_2,$$
$$(G_1+G_2)F=G_1F+G_2F.$$

証明 因为在 $\mathfrak{L}(V_1, V_2)$ 与 $\mathfrak{L}(m, n; K)$，$\mathfrak{L}(V_2, V_3)$ 与 $\mathfrak{M}(l, m; K)$，$\mathfrak{L}(V_1, V_3)$ 与 $\mathfrak{M}(l, n; K)$ 之間的一对一的对应，保持加法及褶合(积)，并且关于 $\mathfrak{L}(V_1, V_2)$，$\mathfrak{L}(V_2, V_3)$，$\mathfrak{L}(V_1, V_3)$ 中元命题 7 的关系成立，所以上述的关系成立。

或引用矩陣的积及和的定义直接計算也容易驗証。

命题 12 $\mathfrak{M}(n, n; K)$ 成为 K 上代数。作为代数也与 $\mathfrak{L}(V)$ 同构。

以后 $\mathfrak{M}(n, n; K)$ 簡写成 $\mathfrak{M}(n, K)$。

例 4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

上例表示矩陣的乘法(即令只限于 $\mathfrak{M}(n, K)$ 中元)，一般是不可交換的。因此，对于 $\mathfrak{L}(V)$ 中元間的褶合来說，交換律不成立。

例 5 当 $G \in \mathfrak{M}(l, m; K)$，$F \in \mathfrak{M}(m, n; K)$ 时，F 的 n 个列向量假定是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，写成 $F=(a_1\ a_2 \cdots a_n)$，那末由矩陣积的定义就得到

$$GF=G(a_1\ a_2 \cdots a_n)=(Ga_1\ Ga_2 \cdots Ga_n).$$

但 Ga_1 等是把 a_1 等看成 $(m, 1)$ 型矩陣的积。假如把 F 中几个列向量集中写成 $F=(F_1\ F_2)$，那末

$$GF=G(F_1\ F_2)=(GF_1\ GF_2). \tag{1}$$

同样，若 G 的 m 个行向量是 ${}_1b, {}_2b, \cdots, {}_mb$，把它們几个集中，假如 $G=\begin{pmatrix} {}_1G \\ {}_2G \end{pmatrix}$，那末

$$GF=\begin{pmatrix} {}_1b \\ {}_2b \\ \vdots \\ {}_mb \end{pmatrix}F=\begin{pmatrix} {}_1bF \\ {}_2bF \\ \vdots \\ {}_mbF \end{pmatrix}, \quad GF=\begin{pmatrix} {}_1G \\ {}_2G \end{pmatrix}F=\begin{pmatrix} {}_1GF \\ {}_2GF \end{pmatrix}. \tag{2}$$

由(1)，(2)得

$$GF=\begin{pmatrix}{}_1G\\ {}_2G\end{pmatrix}(F_1,\ F_2)=\begin{pmatrix}{}_1GF_1 & {}_1GF_2\\ {}_2GF_1 & {}_2GF_2\end{pmatrix}. \tag{3}$$

假如回到矩陣的定义来考慮，立刻知道

$$GF=(G_1\,G_2)\begin{pmatrix}{}_1F\\ {}_2F\end{pmatrix}=G_1\,{}_1F+G_2\,{}_2F, \tag{4}$$

但是，在这里的划分要保証 $G_1\,{}_1F$, $G_2\,{}_2F$ 的积是可能的。以 F 同洋。

由(3)，(4)能够得到一般如下計算：

$$\begin{aligned}GF&=\begin{pmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}G_{11}F_{11}+G_{12}F_{21} & G_{11}F_{12}+G_{12}F_{22}\\ G_{21}F_{11}+G_{22}F_{21} & G_{21}F_{11}+G_{22}F_{22}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 6 把例2的 $P(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m)$ 写成 $\begin{pmatrix}{}_{\nu_1}e\\ {}_{\nu_2}e\\ \vdots\\ {}_{\nu_m}e\end{pmatrix}$，如果

$$F=\begin{pmatrix}{}_1b\\ {}_2b\\ \vdots\\ {}_nb\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}(m,\ n;\ K),$$

那末

$$P(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_m)F=\begin{pmatrix}{}_{\nu_1}b\\ {}_{\nu_2}b\\ \vdots\\ {}_{\nu_m}b\end{pmatrix},$$

它是把 F 的行改排了。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{e_V} & V\\ \varphi_1\downarrow\uparrow\varphi_1^{-1} & & \downarrow\varphi_2\\ K^n & \xrightarrow[P]{} & K^n\end{array}$$

同样，定义 $Q(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_m)=(e_{\nu_1},\ e_{\nu_2},\ \cdots,\ e_{\nu_n})$，如果 $F=(a_1a_2\cdots a_n)$，那末 $FQ(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_n)=(a_{\nu_1}a_{\nu_2}\cdots a_{\nu_n})$. 它是把 F 的列改排了。

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{e_V} & V & \xrightarrow{e_V} & V & \xrightarrow{e_V} & V\\ \varphi_1^{-1}\uparrow & & \varphi_2\downarrow\uparrow\varphi_2^{-1} & & \varphi_1\downarrow\uparrow\varphi_1^{-1} & & \downarrow\varphi_2\\ K^n & \xrightarrow[P]{} & K^n & \xrightarrow[P]{} & K^n & \xrightarrow[P]{} & K^n\end{array}$$
E E

假定 $V_1=V_2=V$, $\dim V=n$，对于 V 取两种坐标系 φ_1, φ_2，那末

$$P=\varphi_2\circ e_V\circ\varphi_1^{-1}\in\mathfrak{M}(n,\ n;\ K),$$

叫做自 φ_1 到 φ_2 的**坐标变换的矩陣**. 假如

$\varphi_1=\varphi_2$，象在例 3 中那样，就得到 $P=E$。

假定自 φ_1 到 φ_2 的坐标变换的矩陣是 P，自 φ_2 到 φ_1 的坐标变换的矩陣是 $\bar{P}$，那末

$$\bar{P}P=(\varphi_1\circ e_V\circ\varphi_2^{-1})\circ(\varphi_2\circ e_V\circ\varphi_1^{-1})=\varphi_1\circ e_V\circ\varphi_1^{-1}=E.$$

同样，

$$P\bar{P}=\bar{P}P=E. \tag{8.6}$$

一般，对于矩陣 P，如果存在使关系 (8.6) 成立的矩陣 $\bar{P}$，則称 $\bar{P}$ 为 P 的**逆矩陣**，今后用 P^{-1} 表示。显然 P 是 P^{-1} 的逆矩陣。具有逆矩陣的矩陣叫做**正則矩陣**。正則矩陣是方陣。

例 7 假定 $F, G\in\mathfrak{M}(n, K)$，把 E_n 写成 E，那末

$$E^{-1}=E \quad (1), \qquad FE=EF=F. \quad (2)$$

假如 F, G 是正則的，那末 FG 也是正則的，$(FG)^{-1}=G^{-1}F^{-1}$. (3)

［解］ (1)，(2) 与命题 11 同样考虑，或由矩陣的計算即得。(3) 由下面的关系自明。

$$(FG)(G^{-1}F^{-1})=F(GG^{-1})F^{-1}=E,$$
$$(G^{-1}F^{-1})(FG)=G^{-1}(F^{-1}F)G=E.$$

例 8 假定 $P(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$，$Q(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是例 6 中的矩陣，那末它們互为逆矩陣。因而都是正則矩陣。

命题 13 假如两个向量空間 V_1, V_2 的坐标系分別由矩陣 P, Q 来变换，那末对应于 $f\in\mathfrak{L}(V_1, V_2)$ 的矩陣 F 就变成 QFP^{-1}。

証明 从右边的图式即可明白。

$$\begin{array}{ccccccc}
V_1 & \xrightarrow{e_{V_1}} & V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 & \xrightarrow{e_{V_2}} & V_2 \\
\uparrow{\scriptstyle\varphi_2^{-1}} & & {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle\varphi_1^{-1}} & & {\scriptstyle\psi_1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle\psi_1^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_2} \\
K^n & \xrightarrow[P^{-1}]{} & K^n & \xrightarrow[F]{} & K^m & \xrightarrow[Q]{} & K^m
\end{array}$$

系 假定 $\mathfrak{L}(V)\ni f\leftrightarrow F\in\mathfrak{M}(n, K)$，如果根据矩陣 P 施行 V 的坐标变换，那末对应于 f 的矩陣就变成 PFP^{-1}。

§9 秩与退化次数

$f: V_1\to V_2$ 时，$f(V_1)$ 叫做 f 的象 (image)。写成 $\operatorname{Im} f$。又

$f^{-1}(0)$叫做f的**核**(Kernel),写成 $\mathrm{Ker}\, f$. 即

$$\mathrm{Im}\, f \subset V_2,\ \mathrm{Ker}\, f \subset V_1.$$

命題 14 f 是全射的必要充分条件是 $\mathrm{Im}\, f = V_2$. 又 f 是单射的必要充分条件是 $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

証明 前半段是显然的。后半段必要条件也是明显的。至于充分条件，当 $\mathrm{Ker}\, f = 0$ 时，假如 $x, y \in V_1$，$f(x) = f(y)$，那末 $f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$，因此由 $x - y = 0$ 就可以明白。(証毕)

当V_1,V_2是有限維时,$\dim(\mathrm{Im}\, f)$,$\dim(\mathrm{Ker}\, f)$当然也是有限。它們分别叫做 f 的**秩** (rank) 和**退化次数**(degeneracy, nullity)，分别用 $r(f)$, $d(f)$ 表示。假如 $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$，那末 $0 \leqslant r(f) \leqslant m$, $0 \leqslant d(f) \leqslant n$. 特别,假如把 $\mathfrak{L}(K^n, K^m)$ 中元作为 f 来考虑,那末矩陣 F 的秩 $r(F)$ 和退化次数 $d(F)$ 都有定义。

命題 15 f 是全射的必要充分条件是 $r(f) = m$. f 是单射的必要充分条件是 $d(f) = 0$.

証明 由命題 14 自明。 (証毕)

假定 $f: V_1 \to V_2$ 由某坐标系用矩陣 $F \in \mathfrak{M}(m, n; K)$ 来表示。$V_1 = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$，因为 $f(V_1) = [f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)]$，所以 $r(f) = \dim f(V_1)$ 等于 $f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)$ 中无关向量的个数。因而下面的命題成立。

命題 16 假定 F 是表示 f 的任意矩陣，那末 $r(f) = r(F)$. 并且它等于 F 的列向量中无关的个数。

引理 2 $r(f) \leqslant \min(m, n)$.

証明 $r(f) \leqslant m$ 在前面已明示。

再在 $f(V_1)$ 中假定$\{f(x_1), \cdots, f(x_r)\}$ 綫性无关，那末当 $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r = 0$ 时, $0 = f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_r f(x_r)$，所以 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. 因此，在 V_1 中 $\{x_1, \cdots, x_r\}$ 綫性无关,所以 $r(f) \leqslant n$.

这引理的結論,詳言之,就有下面的定理 9。

定理 9 由向量空間 V_1 到 V_2 的綫性映射 f 的秩与退化次数的和等于 $\dim V_1$。

証明 假定 $\dim V_1=n$, $r(f)=r$, $d(f)=d$, 命 $n-d=r'$,証明 $r=r'$ 即可。設

$$\operatorname{Ker} f=[a_1, a_2, \cdots, a_d],$$

那末表 $\quad V_1=[a_1, a_2, \cdots, a_d, b_1, b_2, \cdots, b_{r'}]$

时,由定理 6 的証明, $\{b_1, b_2, \cdots, b_{r'}\}$ 关于 $\bmod \operatorname{Ker} f$ 綫性无关,因而如果

$$\lambda_1 f(b_1)+\lambda_2 f(b_2)+\cdots+\lambda_{r'} f(b_{r'})=0,$$

那末 $f(\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\cdots+\lambda_{r'} b_{r'})=0$, 于是 $\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\cdots+\lambda_{r'} b_{r'} \in \operatorname{Ker} f$, 所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{r'}=0$, 因此 r' 个向量 $f(b_1), \cdots, f(b_{r'})$是綫性无关。因为它們都 $\in f(V_1)$, 所以 $r'\leqslant r$。

再假定任意 $x\in V_1$, 因为能够表 $x=\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_d a_d+\mu_1 b_1+\cdots+\mu_{r'} b_{r'}$, 所以 $f(x)=\mu_1 f(b_1)+\cdots+\mu_{r'} f(b_{r'})\in[f(b_1), \cdots f(b_{r'})]$. 于是 $f(V_1)\subset[f(b_1), \cdots, f(b_{r'})]$. 但 $f(b_1), \cdots, f(b_{r'})$ 是綫性无关,所以 $r\leqslant r'$.

于是 $r=r'$ 即 $r+d=n$.

系 f 是单射的必要充分条件是 $r(f)=\dim V_1$. 又 f 是全单射的必要充分条件是 $r(f)=\dim V_1=\dim V_2$ (由命題 15 及定理 9)。

n 級方陣 F 是正则的必要充分条件是 $r(F)=n$. (系毕)

引用定理 9 的記法,假定

$$\operatorname{Ker} f=[a_1, \cdots, a_d],$$

$$V_1=[b_1, \cdots, b_r, a_1, \cdots, a_d], \tag{9.1}$$

因为 $f(b_1), \cdots, f(b_r)$綫性无关, 所以在 V_2 中能够取得含有它們的基底

$$V_2=[f(b_1),\ \cdots,\ f(b_r),\ c_1,\ \cdots,\ c_{m-r}]. \tag{9.2}$$

假定 V_1, V_2 的基底取如(9.1), (9.2)那样，試来确定各个坐标系，显然

$$f \leftrightarrow F=\left(\begin{array}{c|c} E_r & \\ \hline O_{m-r,r} & O_{m,n-r}\end{array}\right). \tag{9.3}$$

当 V_1, V_2 給以任意坐标时，如果对于(9.1)，(9.2)的坐标系施行坐标变换，那末 F 能够变为(9.3)的形状。因此下面的定理成立。

定理 10 假定 $F\in\mathfrak{M}(m,n;\ K)$. 如果 $r(F)=r$, 那就能够挑选适当的正则矩阵 $P\in\mathfrak{M}(n,K)$, $Q\in\mathfrak{M}(m,K)$，使得

$$QFP^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} E_r & \\ \hline O_{m-r,r} & O_{m,n-r}\end{array}\right).$$

例 1
$$F=\begin{pmatrix} -8 & 9 & -5 & 1\\ 6 & -3 & 3 & -3\\ -2 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

因为 $\begin{pmatrix}-8\\6\\-2\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-5\\3\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}9\\-3\\1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-5\\3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$,

所以 $r(F)=2$, 命

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10}\\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

那末

$$QFP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

例 2 $r(g\circ f)\leqslant \min(r(f),\ r(g))$.

〔解〕 假定 $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$，那末 $r(g\circ f)=\dim g(f(V_1))\leqslant\dim f(V_1)=r(f)$，又

$$r(g\circ f)=\dim g(f(V_1))\leqslant\dim g(V_2)=r(g).$$

例 3 假如把例 2 的結果就矩陣来叙述，那就是 $r(GF)\leqslant\min(r(F), r(G))$。特别，如果 P 是正則的，那末 $r(PF)=r(FP)=r(F)$。

〔解〕 当 P 是正則时，取 $PF=G$，那末 $r(G)\leqslant r(F)$，因为 $F=P^{-1}G$，所以 $r(F)\leqslant r(G)$。于是 $r(PF)=r(F)$。同样，$r(FP)=r(F)$。

§10 对偶空間与轉置映射

当 V 是体 K 上向量空間时，$\mathfrak{L}(V, K)$ 也是体 K 上向量空間。它叫做 V 的**对偶空間**，用 $\hat{V}$ 表示。

假定 $\dim V=n$，那末 $\dim\hat{V}=n$❶。取 V 的一个基底 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，給出坐标系 $\varphi=\varphi_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)}$，这时取 $\xi_i(a_j)=\delta_{ij}$ 这样的 n 个 $\hat{V}$ 中元 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，那末它們綫性无关❷。实际上，如果 $\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n=0$，那就得到 $0=(\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n)(a_1)=\lambda_1$。同样得到 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$。因此 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 構成 $\hat{V}$ 的基底。这 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 叫做 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的**对偶基底**，用 $\xi_i=\hat{a}_i$ 表示。又这基底所确定的坐标系（φ 的**对偶坐标系**）用 $\hat{\varphi}$ 表示。

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \hat{V} \\ \downarrow\varphi & & \uparrow\downarrow\hat{\varphi} \\ K^n & \xrightarrow[E_{K^n}]{} & K^n \end{array}$$

$\varphi(a_i)=e_i\quad \hat{\varphi}=\{\hat{a}_1,\cdots,\hat{a}_n\}$
$\hat{a}_i(a_j)=\delta_{ij}$

因为由任意一对 $x\in V$ 及 $\xi\in\hat{V}$ 确定 $\xi(x)\in K$，把 $\xi(x)$ 写成 (x, ξ)，于是 x 能够看成是自 $\hat{V}$ 到 K 的映射。显然下面关系成立。

---

❶ 因为 $\dim V=n$，$\dim K=1$，由命題 10，$\dim\hat{V}=\dim(V, K)=n\cdot 1=n$。——譯者注

❷ 只是在此处，ξ，ξ_i（希腊字）暂时不是表示 K 中元，而是表示 $\hat{V}=\mathfrak{L}(V, K)$ 中元。稍后 $\mathfrak{L}(V, K)$ 中元将用 τ 表示。

$$(x+y, \xi)=(x, \xi)+(y, \xi), \quad (\lambda x, \xi)=\lambda(x, \xi),$$
$$(x, \xi+\eta)=(x, \xi)+(x, \eta), \quad (x, \lambda\xi)=\lambda(x, \xi),$$
$$\left(\begin{matrix} x, y\in V_1, \\ \xi, \eta\in V_1, \end{matrix} \quad \lambda\in K\right).$$

这后面两式表示 $x\in V$ 看成自 $\hat{V}$ 到 K 的映射时，它是綫性映射。即 $V\subset\mathfrak{L}(\hat{V}, K)=\hat{\hat{V}}$。

命題 17　V 是 $\hat{V}$ 的对偶空間。并且 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 成为 $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_n\}$ 的对偶基底。即

$$\hat{\hat{V}}=V, \quad \hat{\hat{a}}_i=a_i.$$

証明　証明前半段只要示明 $\hat{\hat{V}}\subset V$，即取任意 $\tau\in\mathfrak{L}(\hat{V}, K)$，示明存在 $\tau(\xi)=(x, \xi)$ $(\xi\in\hat{V})$ 这样的 $x\in V$ 即可。因为 $\tau(\hat{a}_i)\in K$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，如果命

$$x=\tau(\hat{a}_1)a_1+\tau(\hat{a}_2)a_2+\cdots+\tau(\hat{a}_n)a_n\in V,$$

那末对于这 x，

$$\begin{aligned}(x, \hat{a}_i)&=\tau(\hat{a}_1)(a_1, \hat{a}_i)+\tau(\hat{a}_2)(a_2, \hat{a}_i)+\cdots\\&\quad+\tau(\hat{a}_n)(a_n, \hat{a}_i)\\&=\tau(\hat{a}_i), \quad i=1, 2, \cdots, n.\end{aligned}$$

因为 $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_n\}$ 是 $\hat{V}$ 的基底，所以对于任意 $\xi\in\hat{V}$，$(x, \xi)=\tau(\xi)$ ❶。

后半段由 $(a_i\hat{a}_j)=\delta_{ij}$ ❷ 自明。

假定 W 是 V 的子空間，那末

---

❶ 因为 $\{\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_n\}$ 是 $\hat{V}$ 的基底，所以任意 $\xi\in\hat{V}$ 可以写成

$$\xi=\lambda_1\hat{a}_1+\cdots+\lambda_n\hat{a}_n,$$

于是

$$\begin{aligned}\tau(\xi)&=\lambda_1\tau(\hat{a}_1)+\cdots+\lambda_n\tau(\hat{a}_n)=\lambda_1(x, \hat{a}_1)+\cdots+\lambda_n(x, \hat{a}_n)\\&=(x, \lambda_1\hat{a}_1)+\cdots+(x, \lambda_n\hat{a}_n)=(x, \lambda_1\hat{a}_1+\cdots+\lambda_n\hat{a}_n)\\&=(x, \xi).\end{aligned}$$

——譯者注

❷ 因为 $\xi_i(a_j)=\delta_{ij}$，$\xi_i=\hat{a}_i$，所以 $(a_j, \xi_i)=(a_j\hat{a}_i)=\delta_{ij}$ 即 $(a_i, \hat{a}_j)=\delta_{ij}$。这就是说 a_i 把 $\hat{a}_i$ 变为 1，把 $\hat{a}_j$ 变为 0，所以 $a_i=\hat{\hat{a}}_i$。——譯者注

$$W'=\{\xi;\ \xi(W)=\{0\}\}\subset\hat{V},$$

叫做 W 的**零化空間**(annihilator)。当 $\dim V=n$ 时，下面的命题成立。

命題 18 $(W')'=W$. $\dim W+\dim W'=n$.

証明 假定 $\dim W=r$, $W=[a_1, a_2, \cdots, a_r]$, $V=[a_1, \cdots, a_r, a_{r+1}, \cdots, a_n]$. 引用它的对偶基底，$\hat{V}=[\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_r, \hat{a}_{r+1}, \cdots, \hat{a}_n]$，于是 $\xi\in W'\Leftrightarrow\xi(a_i)=0$, $i=1, 2, \cdots, r$.

假如命 $\xi=\lambda_1\hat{a}_1+\lambda_2\hat{a}_2+\cdots+\lambda_n\hat{a}_n$，那末 $(a_i, \xi)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(a_i, \hat{a}_j)$. 因此 $\xi(a_i)=(a_i, \xi)=0\,(i=1, 2, \cdots, r)\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$，又显然 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0\Leftrightarrow\xi\in[\hat{a}_{r+1}, \cdots, \hat{a}_n]$. 因此

$$\xi\in W'\Leftrightarrow\xi\in[\hat{a}_{r+1}, \cdots, \hat{a}_n],$$

所以

$$W'=[\hat{a}_{r+1}, \cdots, \hat{a}_n].$$

由此命題显然成立❶。

例 1 $W_1\supset W_2\Leftrightarrow W_1'\subset W_2'$.

例 2 $\{0\}'=\hat{V}$, $V'=\{0\}$.

其次，假定 $f\in\mathfrak{L}(V_1, V_2)$，对于任意 $\xi\in\hat{V}_2$，得知 $\xi\circ f\in\hat{V}_1$. 于是对于 ξ 使与 $\xi\circ f$ 对应的映射用 ${}^tf$ 表示，叫做 f 的**轉置映射**。由下面的关系得知 ${}^tf$ 是綫性映射：${}^tf\in\mathfrak{L}(\hat{V}_2, \hat{V}_1)$, ${}^tf(\xi)=\xi\circ f$,

$$V_1\xrightarrow{f}V_2\xrightarrow{\xi}K,\qquad \xi\circ f$$

$$(\xi+\eta)\circ f=\xi\circ f+\eta\circ f,\ (\lambda\xi)\circ f=\lambda(\xi\circ f).$$

假定 $\dim V_1=n$, $\dim V_2=m$，对于 V_1, V_2 給定坐标系 φ, ψ, f 用矩陣 F 表示，同时对于 $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ 給出它們的对偶坐标系 $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$, ${}^tf$ 用矩陣 ${}^tF$ 表示，那末 ${}^tF$ 叫做 F 的轉置矩陣。

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ K^n & \xrightarrow{F} & K^m \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} \hat{V}_1 & \xleftarrow{{}^tf} & \hat{V}_2 \\ \hat{\varphi}\downarrow & & \downarrow\hat{\psi} \\ K^n & \xleftarrow{{}^tF} & K^m \end{array}$$

命題 19 假定 $F=(\alpha_{ik})$，那末

---

❶ 因为 $W=[a_1, \cdots, a_r]$, $W'=[\hat{a}_{r+1}, \cdots, \hat{a}_n]$, $\hat{V}=[\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_r, \hat{a}_{r+1}, \cdots, \hat{a}_n]$，所以 $(W')'=[\hat{\hat{a}}_1, \cdots, \hat{\hat{a}}_r]=[a_1, \cdots, a_r]=W$. ——譯者注

$$^tF=(\alpha_{ki}).$$

即 ^tF 是互换 F 的行列所成的矩陣。如果

$$F=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix},\text{那末 } ^tF=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}.$$

証明 假定 $V_1=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$，$V_2=[b_1, b_2, \cdots, b_m]$，

$$\hat{V}_1=[\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_n],\ \hat{V}_2=[\hat{b}_1, \hat{b}_2, \cdots, \hat{b}_m].$$

由 $F=(\alpha_{ik})$ 得 $f(a_k)=\alpha_{1k}b_1+\cdots+\alpha_{mk}b_m\ (k=1, 2, \cdots, n)$。

要証明 $^tF=(\alpha_{ki})$，只要証明 $^tf(\hat{b}_i)=\alpha_{i1}\hat{a}_1+\cdots+\alpha_{in}\hat{a}_n\ (i=1, 2, \cdots, m)$ 即可。但是在这里只要示明对于任意 $k\ (k=1, 2, \cdots, n)$，$^tf(\hat{b}_i)(a_k)=(\alpha_{i1}\hat{a}_1+\cdots+\alpha_{in}\hat{a}_n)(a_k)$ 成立就行了。因为 $(\alpha_{i1}\hat{a}_1+\cdots+\alpha_{in}\hat{a}_n)(a_k)=\alpha_{ik}$，$^tf(\hat{b}_i)(a_k)=\hat{b}_i\cdot f(a_k)=\hat{b}_i(\alpha_{1k}b_1+\cdots+\alpha_{mk}b_m)=\alpha_{ik}$，所以它成立。

例 3 §8 例 6 中的 $P(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$，$Q(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是互为轉置矩陣。

命題 20 $^t(f_1+f_2)={}^tf_1+{}^tf_2$，$^t(\lambda f)=\lambda{}^tf$，$^t(g\circ f)={}^tf\circ{}^tg$，

$$^t(F_1+F_2)={}^tF_1+{}^tF_2,\ ^t(\lambda F)=\lambda{}^tF,\ ^t(GF)={}^tF\,{}^tG.$$

証明 只須証明 $^t(g\circ f)={}^tf\circ{}^tg$。其余都是明显的。

$$V_1\xrightarrow{f}V_2\xrightarrow{g}V_3\xrightarrow{\xi}K$$

$$\hat{V}_1\xleftarrow{^tf}\hat{V}_2\xleftarrow{^tg}\hat{V}_3,\quad {}^tg(\xi)\in\hat{V}_2,\ \xi\in\hat{V}_3$$

对于任意 $\xi\in\hat{V}$，

$$\begin{aligned}^t(g\circ f)(\xi)&=\xi\circ(g\circ f)\\&=(\xi\circ g)\circ f=({}^tg(\xi))\circ f={}^tf({}^tg(\xi))\\&=({}^tf\circ{}^tg)(\xi).\end{aligned}$$

所以
$$^t(g\circ f)={}^tf\circ{}^tg.$$

定理 11 $r(f)=r({}^tf)$。

証明 假設 $\dim V_1=n$，$\dim V_2=m$，$r(f)=\dim \mathrm{Im} f=r$。如果 $(\mathrm{Im} f)'$ 是 $\mathrm{Im} f$ 的零化空間，那末 $(\mathrm{Im} f)'\subset\hat{V}_2$，$\dim(\mathrm{Im} f)'$

$=m-r$。但是

$$\xi\in(\operatorname{Im}f)'\Leftrightarrow\xi(\operatorname{Im}f)=0\Leftrightarrow\xi\, f(V_1)=0$$
$$\Leftrightarrow({}^tf(\xi))(V_1)=0\Leftrightarrow{}^tf(\xi)=0$$
$$\Leftrightarrow\xi\in\operatorname{Ker}{}^tf,$$

因此 $$\operatorname{Ker}{}^tf=(\operatorname{Im}f)',$$

所以 $$r({}^tf)=m-\dim(\operatorname{Ker}{}^tf)=m-\dim(\operatorname{Im}f)'=r.$$

系 1 假定 F 是任意矩陣，那末 $r(F)=r({}^tF)$。

系 2 $r(F)$ 也等于 F 的行向量中无关的个数。

系 3 矩陣的列向量中无关的个数与行向量中无关的个数相等。

在矩陣 F 中把除去它的若干行及若干列所成的矩陣作为是 G，表为 $F\supset G$。假如

$$F=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix},$$

那末 $$G=\begin{pmatrix}\alpha_{\nu_1\mu_1} & \alpha_{\nu_1\mu_2} & \cdots & \alpha_{\nu_1\mu_k}\\ \alpha_{\nu_2\mu_1} & \alpha_{\nu_2\mu_2} & \cdots & \alpha_{\nu_2\mu_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{\nu_l\mu_1} & \alpha_{\nu_l\mu_2} & \cdots & \alpha_{\nu_l\mu_k}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}k\leqslant n\\ l\leqslant m\end{pmatrix}.$$

系 4 假定 $F\supset G$，那末 $r(F)\geqslant r(G)$。

証明 假定除去矩陣 F 中若干列所成的矩陣是 F'，那末 F' 的列向量中无关的个数不超过 F 的列向量中无关的个数，因而 $r(F)\geqslant r(F')$。再假定除去 F' 中若干行所成的矩陣是 F''，比較 F' 与 F'' 的行向量中无关的个数，即得 $r(F')\geqslant r(F'')$，于是 $r(F)\geqslant r(F'')$。

因为 G 能够象这样由 F 来形成，所以 $r(F)\geqslant r(G)$。（証毕）

定理 12 假定 F 是任意矩陣，那末存在象

$$F \supset F_{00}$$

这样的正则矩陣 F_{00}。

这 F_{00} 叫做 F 的**主部**。

証明 假定 $r(F)=r$，那末 F 的列向量中无关的恰好有 r 个，只把它們留下而将其余各列都除去所成的矩陣假定是 F_0，那末 $r(F_0)=r$. 又因为 F_0 的行向量中无关的恰好有 r 个，所以只留下它們而将其余各行都除去所成的矩陣假定是 F_{00}，那末 $r(F_{00})=r$. 显然 F_{00} 是 r 級方陣，所以 F_{00} 是正則的。 (証毕)

由 §8 例 6，对于 F 用适当的正則矩陣左及右相乘就能够使主部在"左上"位置。

§11 1 次方程

1 次方程的原型，中学以来就知道的，是

$$ax=b \tag{11.1}$$

形状的方程。在中学所討論的一般是在 $a, b\in \boldsymbol{R}$ 情况下，求滿足(11.1)的 $x\in \boldsymbol{R}$. 因为以任意体 K 代替 $\boldsymbol{R}$ 来考虑时，理論完全相同，所以以下假定 $a, b, x\in K$ (K 是任意体)。如所周知，(11.1)的解

(i) 假如 $a\neq 0$，那末 $x=\dfrac{b}{a}$.

(ii) 假如 $a=0$, $b=0$，那末 x 是 K 中任意元。

(iii) 假如 $a=0$, $b\neq 0$，那末不論 x 取任何值，(11.1)不成立。

(i)的情况，解是唯一的。它叫做**正則情况**。又(ii)叫做**不定情况**，而(iii)叫做**不能情况**。假如(11.1)的解的集合是 S，那末对于(i)，(ii)，(iii)各种情况，分别是 $S=\{b/a\}$, $S=K$, $S=\emptyset$.

假定 $f(x)=ax$，把 f 看成自 K^1 到 K^1 的綫性映射，因此 $S=f^{-1}(b)$. 一般，給定了自 K 上向量空間 V_1 到 V_2 的綫性映射 f 与 $y\in V_2$ 时，把求滿足 $f(x)=y$ 的 x 的集合 $f^{-1}(y)$ 叫做解 **1 次方程**

$$f(x)=y. \tag{11.2}$$

(“1次”是“綫性”的同义語之一，在上面已叙述过。）当$f_1, f_2\in\mathfrak{L}(V_1, V_2)$，$y_1, y_2\in V_2$时，假如$f_1^{-1}(y_1)=f_2^{-1}(y_2)$，那末两个1次方程$f_1(x)=y_1$，$f_2(x)=y_2$叫做**等价**。

命题 21 当 $f^{-1}(y)\neq\emptyset$ 时，假如 $x_0\in f^{-1}(y)$，那末 $f^{-1}(y)=(x_0+u; u\in\operatorname{Ker}f)$．（这右边用$x_0+\operatorname{Ker}f$表示。）

証明 由 $x\in f^{-1}(y)\Leftrightarrow f(x)=y\Leftrightarrow f(x-x_0)=f(x)-f(x_0)=0\Leftrightarrow x-x_0\in\operatorname{Ker}f$，自明。 （証毕）

当$f^{-1}(y)=\emptyset$时，1次方程(11.2)叫做**不能**，$f^{-1}(y)$只由一个元构成时，(11.2)叫做**正則**。不是不能也不是正則时，(11.2)叫做**不定**。在不定情况，$f^{-1}(y)$中任意一元x_0叫做(11.2)的**特殊解**，$x_0+\operatorname{Ker}f$叫做(11.2)的**一般解**。因此求一般解的問題归結于求特殊解及求$\operatorname{Ker}f$。

例 1 假定f是全单射，那末(11.2)总是正則。假如f是单射，$y\in\operatorname{Im}f$，那末(11.2)正則。$y\notin\operatorname{Im}f$与(11.2)不能等价。

在(11.2)中，$y=0$时，(11.2)叫做**齐次方程**，$y\neq0$时，(11.2)叫做**非齐次方程**。(11.2)是非齐次方程时，左边用0代替所得的

$$f(x)=0$$

叫做**伺伴**于(11.2)的齐次方程。解它不外是求$\operatorname{Ker}f$。

例 2 解綫性微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}=p(x) \tag{1}$$

$(p_1(x),\cdots,p_{n-1}(x), p(x)$都是連續函数)

时，假如命

$$\Lambda=D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D\in\mathfrak{L}(\mathfrak{C}^n, {}^0\mathfrak{C})\ (\S7\ 例7),$$

就不外是解1次方程

$$\Lambda(f)=p,$$

因此用(1)的一个特殊解$f_0(x)$及伺伴齐次方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}=0$$

的一般解 $\varphi(x)$，就能表示(1)的一般解为

$$f(x)=f_0(x)+\varphi(x).$$

以下就 V_1, V_2 是有限維，$\dim V_1=n$, $\dim V_2=m$ 的情况来考虑。假定对于 V_1, V_2，取坐标系 φ, ψ. 它們分别表示为 K^n, K^m, $f: V_1\to V_2$ 用 (m, n) 型矩陣 $A=(\alpha_{ik})$ 表示。把 $\varphi(x)\in K^n$, $\psi(y)\in K^m$ 写成

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},\quad \psi(y)=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix},$$

那末方程(11.2)就是 n 元联立1次方程

$$\begin{cases}\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\cdots+\alpha_{1n}\xi_n=\eta_1,\\ \alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\cdots+\alpha_{2n}\xi_n=\eta_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{m1}\xi_1+\alpha_{m2}\xi_2+\cdots+\alpha_{mn}\xi_n=\eta_m.\end{cases}\tag{11.3}$$

在本节,为簡单起見,以后 $\varphi(x)$, $\psi(y)$ 分别用 x, y 表示。命 $(\alpha_{ik})=F$,那末(11.3)可以写成

$$Fx=y.\tag{11.3'}$$

在矩陣 F 中添加 y 作为第 $n+1$ 列形成的 $(m, n+1)$ 型矩陣用 F_1 表示，

$$(Fy)=F_1.\tag{11.4}$$

命題 22 方程(11.3′)不是不能的必要充分条件是 $r(F)=r(F_1)$.

証明 把 F 中 n 个列向量写成 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,那末

$$F=(a_1\,a_2\cdots a_n),\quad F_1=(a_1\,a_2\cdots a_n\,y).$$

因为 $r(F)=r(F_1)$ 就等价于 F, F_1 的列向量中无关的个数相等，所以

$$r(F)=r(F_1)\Leftrightarrow y\in[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$$
$$\Leftrightarrow y=\xi_1a_1+\xi_2a_2+\cdots+\xi_na_n,\ \xi_i\in K.$$

这最后一式就与(11.3′)有解 $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$ 等价。

命题 23 假定 F 是正则矩陣,那末方程(11.3)或(11.3′)也是正则,它的解是 $x=F^{-1}y$.

証明 假定 F 是正則的,引用 F^{-1} 得

$$Fx=y\Leftrightarrow F^{-1}Fx=F^{-1}y\Leftrightarrow x=F^{-1}y.$$

所以(11.3)或(11.3′)只有一个解 $x=F^{-1}y$. 因此是正則。

命题 24 (11.3)是正則的必要充分条件是(11.3)不是不能并且 $r(F)=n$.

証明 当(11.3)不是不能时,它的解可表为 $x_0+\mathrm{Ker}\ F$,所以(11.3)是正則 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ F=\{0\}\Leftrightarrow r(F)=n-\dim\mathrm{Ker}\ F=n$.

系 假定(11.3)不是不能并且 $m<n$, 那末(11.3)是不定的.

証明 因为 $r(F)\leqslant\min(m,\ n)$,所以 $r(F)\leqslant m<n$. 于是由命題 24,(11.3)不是正則的。 (証毕)

假如互換矩陣 F 的 m 个行, 对于 $\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_m$ 也施行与它相同的互換,那末在(11.3)中只是改变方程的順序,显然得到与它等价的方程。再互換 F 的 n 个列, 只是改变"未知数的名称"。能够得到在本质上仍然与它相同的方程。因此不失一般性, F 的主部可假定在左上位置。

命题 25 假定方程(11.3) 不是不能, $r(F)=r$, 并且 F 的主部在左上位置,那末(11.3)与它最初的 r 个方程等价。

証明 假定 F 的各个行向量是 ${}_1b,\ {}_2b,\ \cdots,\ {}_mb$,那末(11.3)中各式成为

$${}_1bx=\eta_1,\ {}_2bx=\eta_2,\ \cdots,\ {}_mbx=\eta_m. \qquad (11.3'')$$

因为$\{{}_1b, {}_2b, \cdots, {}_mb\}$中最初 r 个綫性无关，所以

$${}_ib=\lambda_1^{(i)}\cdot{}_1b+\lambda_2^{(i)}\cdot{}_2b+\cdots+\lambda_r^{(i)}\cdot{}_rb \quad (i=r+1,\ r+2,\ \cdots,\ m),$$

因此 (11.3″) 中前 r 个方程如果成立，則剩下的$(m-r)$个也必然成立。所以(11.3)与它最初的 r 个方程等价。　　　　(証毕)

由命题 25，对于(11.3)可假定 $m=r(F)$不失一般性。

定理 13　假定在(11.3)，$m=r(F)$ 并且 F 的主部 F_0 在左上位置，$F=(F_0F_*)$，$F_0\in\mathfrak{M}(m, K)$，$F_*\in\mathfrak{M}(m, n-m; K)$，那末(11.3)的一个解为

$$x_0=\begin{pmatrix} F_0^{-1}y \\ O_{n-m,1}\end{pmatrix}.$$

如果 $n=m$，則方程成为正則(因而它沒有其他解)。如果 $n-m=s>0$，那末(11.3)成为不定，$\begin{pmatrix} F_0^{-1}F_* \\ -E_s\end{pmatrix}$中 s 个列向量形成 $\mathrm{Ker}\,F$ 的基底。

証明　因为 $Fx_0=F\begin{pmatrix} F_0^{-1}y \\ O\end{pmatrix}=(F_0F_*)\begin{pmatrix} F_0^{-1}y \\ O\end{pmatrix}=(F_0F_0^{-1}y+O)=y$，所以 x_0 是(11.3)的一个解。

因为 $\dim\mathrm{Ker}\,F=n-r(F)=n-m$，假如 $m=n$，那末 $\mathrm{Ker}\,F=\{0\}$。所以方程(11.3)成为正則。

假如 $n-m=s>0$，那末 $\dim\mathrm{Ker}\,F=s$。因此假如$\begin{pmatrix} F_0^{-1}F_* \\ -E_s\end{pmatrix}$的 s 个列向量是 $a_1, a_2, \cdots, a_s$，如果能够証明它們都 $\in\mathrm{Ker}\,F$，并且$\{a_1, a_2, \cdots, a_s\}$綫性无关，那末它們显然成为 $\mathrm{Ker}\,F$ 的基底。

$$F\begin{pmatrix} F_0^{-1}F_* \\ -E_s\end{pmatrix}=(\underset{m}{\overleftrightarrow{F_0}}\ \underset{s}{\overleftrightarrow{F_*}})\begin{pmatrix} F_0^{-1}F_* \\ -E_s\end{pmatrix}\begin{matrix}\updownarrow m \\ \updownarrow s\end{matrix}$$
$$=(F_0F_0^{-1}F_*-F_*E_s)=O_{m,s},$$

这表示 $Fa_i=0(i=1, 2,\cdots,s)$。所以 $a_i\in F^{-1}(0)\ (i=1, 2,\cdots,s)$。

又假如 $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_sa_s=0$，如果着眼于第 $(m+i)$ 行元素就得到 $-\lambda_i=0\,(i=1, 2, \cdots, s)$，所以$\{a_1, a_2,\cdots, a_s\}$綫性无关。

§12 行 列 式

方程 (11.3) 的实际解法有在中学里所熟知的消去法，及其他种种。在这里我們叙述用行列式的解法 (关于各种实际解法参照古屋茂氏：矩陣与行列式)。

由前节的結果，1 次方程

$$Fx=y \tag{12.1}$$

的解法归結于解下面关于已知方陣 F_0 的两个問題：

（i）判定 F_0 是否正則，

（ii）当 F_0 是正則时，計算 F_0^{-1}.

实际上，假如(i)，(ii)能够解决，那末方程(12.1)可以按照下面的順序来求解。

首先来考查是否 $r(F)=r(F_1)$，因为 $r(F)$ 是含于 F 中的最大正則矩陣的級数，所以假如在含于 F 的方陣中，r 級的正則矩陣至少有一存在，而$(r+1)$級以上的方陣都不正則，那末 $r(F)=r$. 同样可以求出 $r(F_1)$. 如果 $r(F)\neq r(F_1)$，那末方程是不能。

当 $r(F)=r(F_1)$ 时，設含于 F 的 r 級正則矩陣 (F 的主部) 之一假定是 F_0. 适当改变方程的順序及未知数的名称，可以使得 F_0 在左上位置。这时最初的 r 个方程如果是 $(F_0F_*)x=y$，那末解它即可。

假如未知数的个数即 x 的維数也等于 r，那末方程成为 $F_0x=y$. 它是正則方程，解由 $x=F_0^{-1}y$ 給出。

当未知数的个数比 r 大时，由定理 13，一个特殊解用 $x_0=\begin{pmatrix}F_0^{-1}y\\ O_{n-r,1}\end{pmatrix}$ 給出。同伴齐次方程的一般解当 $\begin{pmatrix}F_0^{-1}F_*\\ -E_{n-r}\end{pmatrix}$ 的列向量假定是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r}$ 时，用 $\sum_{i=1}^{n-r}\lambda_i a_i$ 給出，所以(12.1)的一般解是

$$x=\begin{pmatrix}F_0^{-1}y\\O_{n-r,1}\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{n-r}\lambda_i a_i.$$

上面两个問題(i)，(ii)可以用行列式来解答。首先来叙述行列式的定义。

行列式D_n是自$\mathfrak{M}(n, K)$到K的映射，关于n归納定义如下：

（i）假如$n=1$，那末$\mathfrak{M}(1, K)=K$，这时$D_1=e_K$(K的恒等映射)。

（ii）当$n>1$时，設自$F\in\mathfrak{M}(n, K)$除去第一行$(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1n})$所得的$(n-1, n)$型矩陣是$F^*$，自$F^*$除去第$i$列所得的$(n-1, n-1)$型矩陣假定是$F_i^*$。假如$D_{n-1}$已定义，这时

$$D_n(F)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}\alpha_{1i}D_{n-1}(F_i^*).$$

$D_n(F)$叫做F的**行列式**，用$|F|$或$\det F$表示。显然$D_n(F)$能够对于F中各元素施行加减乘法而求得。

例1 $D_1(\alpha)=\alpha$❶，

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21},$$

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}-\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{21}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{21}&\alpha_{22}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}\end{vmatrix}$$

$$=\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})-\alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{31})+\alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})$$

$$=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{32}\alpha_{21}-\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}-\alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}.$$

例2

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}&0&0&\cdots&0\\0&\alpha_{22}&0&\cdots&0\\0&0&\alpha_{33}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&\alpha_{nn}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{nn}\quad\text{(对角綫型)}.$$

❶ $n=1$时，写$D_1(\alpha)=|\alpha|$不太通行，因为恐怕与α的絕对值混淆。

一般，
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{nn} \quad \text{（第1三角型）.}$$

假如把矩陣 F 的第 i 行写成 ${}_ib$，第 k 列写成 a_k，那末

$$D_n(F) = D_n(a_1\, a_2 \cdots a_n) = D_n\begin{pmatrix} {}_1b \\ {}_2b \\ \vdots \\ {}_nb \end{pmatrix}$$

可以看成为 n 个向量 a_k 或 n 个向量 ${}_ib$ 的函数。在这里固定 a_2, a_3, $\cdots$, a_n 而考虑 $D_n(F)$ 只是 a_1 的函数时，把 $D_n(F)$ 写成 $D_n^1(a_1)$。同样定义 $D_n^k(a_k)$，${}^iD_n({}_ib)$。

命题 26 (i) $D_n^k \in \mathfrak{L}(K^n, K)$，(ii) ${}^iD_n \in \mathfrak{L}({}^nK, K)$。

証明 关于 n 用归納法。

（i）当 $n=1$ 时，$D_1^1 = D_1 = \varepsilon_K \in \mathfrak{L}(K^1, K)$。

$$F = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots\alpha_{1n} \\ \hline a_1^* & F_1^* \end{array}\right).$$

当 $n>1$ 时，假定 $D_{n-1}^k \in \mathfrak{L}(K^{n-1}, K)$ 已証明。命 $a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ a_1^* \end{pmatrix}$，那末

$$D_n^1(a_1) = D_n(F) = \alpha_{11} D_{n-1}(F_1^*) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{1+i} \alpha_{1i} D_{n-1}(F_i^*)$$

$$= \alpha_{11} D_{n-1}(F_1^*) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{1+i} \alpha_{1i} D_{n-1}^1(a_1^*).$$

因为 $D_{n-1}^1 \in \mathfrak{L}(K^{n-1}, K)$，所以

$$D_n^1(a_1 + a_1') = (\alpha_{11} + \alpha_{11}') D_{n-1}(F_1^*)$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} (-1)^{1+i} \alpha_{1i} (D_{n-1}^1(a_1^*) + D_{n-1}^1(a_1'^*))$$

$$= D_n^1(a_1) + D_n^1(a_1')$$ ❶.

同样 $$D_n^1(\lambda a_1) = \lambda D_n^1(a_1).$$

所以 $$D_n^1 \in \mathfrak{L}(K^n, K).$$

同样 $$D_n^k \in \mathfrak{L}(K^n, K).$$

(ii) 当 $n=1$ 时，${}^1D_1 = D_1 = e_K \in \mathfrak{L}({}^1K, K)$.

当 $n>1$ 时，${}^1D_n \in \mathfrak{L}({}^nK, K)$ 由 D_n 的定义自明❷。一般，假定 ${}^iD_{n-1} \in \mathfrak{L}({}^{n-1}K, K)$，$F_j^*$ 的第 $(i-1)$ 行为 ${}_ib^{(j)}$，那末

$${}^iD_n({}_ib) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \alpha_{1j}\, {}^{i-1}D_{n-1}({}_ib^{(j)}).$$

但是由归納法的假定，${}^{i-1}D_{n-1} \in \mathfrak{L}({}^{n-1}K, K)$，所以

$${}^iD_n({}_ib) \in \mathfrak{L}({}^nK, K).$$

命題 27 当 $n \geqslant 2$ 时，

(i) 两列是相同向量的矩陣的行列式等于 0，卽假如 $a_k = a_{k'}(k \neq k')$，那末 $D_n(F)=0$.

(ii) 假如把 $(a_1 \cdots a_i \cdots a_k \cdots a_n)$ 中两列 a_i，a_k 互換所成的矩陣是 $(a_1 \cdots a_k \cdots a_i \cdots a_n)$，那末 $D(a_1 \cdots a_i \cdots a_k \cdots a_n) = -D(a_1 \cdots a_k \cdots a_i \cdots a_n)$.

証明 关于 n 用归納法，当 $n=2$ 时，引用例 1 的結果立卽明白。对于 $n-1$，假定(i)，(ii)成立。在 F 中当 $a_k = a_{k'}$ 时，

$$D_n(F) = \alpha_{1k} D_{n-1}(F_k^*) + \alpha_{1k'} D_{n-1}(F_{k'}^*) + \sum_{i \neq k, k'} \alpha_{1i} D_{n-1}(F_i^*),$$

前两項的和根据 $\alpha_{1k} = \alpha_{1k'}$，$D_{n-1}(F_k^*) = -D_{n-1}(F_{k'}^*)$（归納法假定）是 0. 在剩下的項中，$F_i^*$ 含两列相同的向量，又由归納法假定各項都成为 0. 因此(i)成立。

---

❶ 因为 $D_{n-1}^i \in \mathfrak{L}(K^{n-1}, K)$，所以 $D_{n-1}^i(a_1^* + a_1'^*) = D_{n-1}^i(a_1^*) + D_{n-1}^i(a_1'^*)$.——譯者注

❷ 因为 ${}^1D_n({}^1a + {}^1a') = \sum(-1)^{1+i}(\alpha_{1i} + \alpha_{1i}')D_{n-1}(F_i^*) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}\alpha_{1i}D_{n-1}(F_i^*) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}\alpha_{1i}'D_{n-1}(F_i^*) = {}^1D_n({}^1a) + {}^1D_n({}^1a^*)$，所以 ${}^1D_n \in \mathfrak{L}({}^nK, K)$. ——譯者注

再由命题 26(i),

$$
\begin{aligned}
0 &= D_n(a_1+a_2\ \ a_1+a_2\ \ a_3\cdots a_n)\\
&= D_n(a_1\ a_2\ a_3\cdots a_n)+D_n(a_1\ a_2\ a_3\cdots a_n)\\
&\quad +D_n(a_2 a_1 a_3\cdots a_n)+D_n(a_2 a_2 a_3\cdots a_n)\\
&= D_n(a_1 a_2 a_3\cdots a_n)+D_n(a_2 a_1 a_3\cdots a_n).
\end{aligned}
$$

所以

$$D_n(a_1 a_2 a_3\cdots a_n) = -D_n(a_2 a_1 a_3\cdots a_n).$$

同样　$D_n(a_1\cdots a_i\cdots a_k\cdots a_n) = -D_n(a_1\cdots a_k\cdots a_i\cdots a_n)$.

系 1　假如 F 中列向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 綫性相关,那末 $D_n(F)=0$。

証明　当 $n=1$ 时, $F=(0)$, 所以 $D_1(0)=0$。

当 $n\geqslant 2$ 时, 譬如 $a_1=\sum\limits_{i=2}^{n}\lambda_i a_i\ (\lambda_i\in K)$, 引用命题 26 (i) 得

$$D_n(F)=D_n\left(\sum_{i=2}^{n}\lambda_i a_i,\ a_2\cdots a_n\right)=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i(a_i\cdots a_i\cdots a_n)=0.$$

系 2　假如 $r(F)<n$, 那末 $D_n(F)=0$。

証明　假如 $r(F)<n$, 那末 F 的列向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 綫性相关,因此由系 1 自明。

注意　由命题 27 已导出系 1, 系 2. 反之由系 2 也能导出命题 27, 即假定系 2 成立,那末命题 27(i) 显然成立,因而(ii)也成立❶。

把 E_n 作为例 2 中对角綫型矩陣的特殊情况来考虑, 可直接得到下面的命题。

命题 28　$D_n(E_n)=1$.

假定$(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$是$(1, 2, \cdots, n)$的任意排列, 自$(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$中任意取出两数$(\nu_i, \nu_j)$, 如果左边的数大于右边的数,那

---

❶　因为 $D_n^k\in\mathfrak{L}(K^n, K)$, 所以 $D_n(a_1\cdots a_i+a_k\cdots a_k+a_i\cdots a_n)=D_n(a_1\cdots a_i\cdots a_k\cdots a_n)+D_n(a_1\cdots a_k\cdots a_i\cdots a_n)=0$. 因此 $D_n(a_1\cdots a_i\cdots a_k\cdots a_n)=-D_n(a_1\cdots a_k\cdots a_i\cdots a_n)$.
——譯者注

末在此处就說有一**反序**。含于$(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$的反序总数假如是$I$，規定$\mathrm{sgn}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)=(-1)^I$。按照$\mathrm{sgn}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)=1$及$-1$，分别把$(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$叫做**偶排列**，**奇排序**。計算$I$的实际方法，可以象下面那样来进行。在$(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$中，在1左边的数的个数假如是$I_1$，一般在$k$左边比$k$大的数的个数假如是$I_k$，那末$\sum_{k=1}^{n-1} I_k = I$。

在排列$(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$中，先把1与在它左边的数作$I_1$回互换，那末1就在最左边。次把2与在它左边的作$I_2$回互换，2就在1的后面。余类推。在$(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$中总共施行$I$回"两数字的互换"(**对換**)就能够使它成为正常排列$(1, 2, \cdots, n)$。

系1　用§8例6的記法，假如$Q(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)=(e_{\nu_1}e_{\nu_2}\cdots e_{\nu_n})$，那末$D_n(Q(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n))=\mathrm{sgn}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$。

証明　对于$Q(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)=(e_{\nu_1}e_{\nu_2}\cdots e_{\nu_n})$的列施行$I$回对换能够把这矩陣变为$(e_1 e_2\cdots e_n)=E_n$。由命題27，对于各个对换行列式只改变符号，所以$D_n(Q(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n))=(-1)^I D_n(E_n)$
$=\mathrm{sgn}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$。

系2　自F中各列各行各取出一元素$\alpha_{\nu_1 1}, \alpha_{\nu_2 2}, \cdots, \alpha_{\nu_n n}$，作$\mathrm{sgn}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)\alpha_{\nu_1 1}\alpha_{\nu_2 2}\cdots\alpha_{\nu_n n}$，那末$D_n(F)$等于这样的$n!$个积的总和，即

$$D_n(F)=\sum \mathrm{sgn}(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)\alpha_{\nu_1 1}\alpha_{\nu_2 2}\cdots\alpha_{\nu_n n}.$$

証明　$F=\left(\sum_{\nu_1=1}^{n} \alpha_{\nu_1 1}e_{\nu_1} \sum_{\nu_2=1}^{n} \alpha_{\nu_2 2}e_{\nu_2}\cdots \sum_{\nu_n=1}^{n} \alpha_{\nu_n n}e_{\nu_n}\right)$.

所以由命題27(i)，

$$\begin{aligned} D_n(F) &= \sum D_n(\alpha_{\nu_1 1}e_{\nu_1}\alpha_{\nu_2 2}e_{\nu_2}\cdots\alpha_{\nu_n n}e_{\nu_n}) \\ &= \sum D_n(e_{\nu_1}e_{\nu_2}\cdots e_{\nu_n})\alpha_{\nu_1 1}\alpha_{\nu_2 2}\cdots\alpha_{\nu_n n}. \end{aligned}$$

这里$\sum$是n^n个行列式的綫性組合，但因为其中在$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$中有相等的項都成为0，所以就成为象下面那样$n!$个項的和

$$D_n(F)=\sum D_n(Q(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_n))\alpha_{\nu_1 1}\alpha_{\nu_2 2}\cdots\alpha_{\nu_n n}$$
$$=\sum \operatorname{sgn}(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_n)\alpha_{\nu_1 1}\alpha_{\nu_2 2}\cdots\alpha_{\nu_n n}.\qquad \text{(証毕)}$$

命題 29 假定 $\mathfrak{D}_n:\mathfrak{M}(n,\ K)\to K$，并且满足下列两条件：

（i） 如果把 $\mathfrak{D}_n$ 看成第 k 列的函数，写成 $\mathfrak{D}_n^k$，那末

$$\mathfrak{D}_n^k\in\mathfrak{L}(K^n,\ K)\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

（ii） 如果 $r(F)<n$，那末 $\mathfrak{D}_n(F)=0$，

则
$$\mathfrak{D}_n(F)=D_n(F)\mathfrak{D}_n(E_n).$$

証明 可以与命題 28 系 2 完全一样，象下面那样导出

$$\mathfrak{D}_n(F)=\mathfrak{D}_n(a_1\cdots a_n)=\mathfrak{D}_n(\sum\alpha_{\nu_1}e_{\nu_1}\cdots\sum\alpha_{\nu_n n}e_{\nu_n})$$
$$=\sum\alpha_{\nu_1 1}\cdots\alpha_{\nu_n n}\mathfrak{D}_n(e_{\nu_1}\cdots e_{\nu_n})$$
$$=\sum\alpha_{\nu_1 1}\cdots\alpha_{\nu_n n}\operatorname{sgn}(\nu_1,\ \cdots,\ \nu_n)\mathfrak{D}_n(E_n)$$
$$=D_n(F)\mathfrak{D}_n(E_n).$$

例 3 $\begin{vmatrix}A_r & O_{r,s}\\ O_{s,r} & B_s\end{vmatrix}=|A_r|\cdot|B_s|.$

［解］ 固定 B_s，把 $D_r=\begin{vmatrix}A_r & O\\ O & B_s\end{vmatrix}$ 看成 A_r 的函数，那末 $D_r:\mathfrak{M}(r,K)\to K$，(i) $D_r^k\in\mathfrak{L}(K^r,K)$，(ii) 如果 $r(A)<r$，那就 $D_r(A)=0$。因此❶

$$D_r=|A_r|\begin{vmatrix}E_r & O\\ O & B_s\end{vmatrix}.$$

同样

$$\begin{vmatrix}E_r & O\\ O & B_s\end{vmatrix}=|B_s|\begin{vmatrix}E_r & O\\ O & E_s\end{vmatrix}=|B_s|，\text{所以 } D_r=|A_r|\cdot|B_s|.$$

系 1 $D_n(F)=D_n({}^tF)=\sum\operatorname{sgn}(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_n)\alpha_{1\nu_1}\alpha_{2\nu_2}\cdots\alpha_{n\nu_n}.$

証明 假如命 $D_n({}^tF)=\mathfrak{D}_n(F)$，那末 $\mathfrak{D}_n:\mathfrak{M}(n,\ K)\to K$。

（i） 因为命題 29 的 $\mathfrak{D}_n^k$ 是把在命題 26 之前定义的 ${}^kD_n\in\mathfrak{L}({}^nK,\ K)$ “纵看”，所以 $\mathfrak{D}_n^k\in\mathfrak{L}(K^n,\ K)$。

---

❶ 这时 $D_r(E_r)=\begin{vmatrix}E_r & O\\ O & B_s\end{vmatrix}$，$\mathfrak{D}_r(A_r)=\begin{vmatrix}A_r & O\\ O & B_r\end{vmatrix}$，所以 $D_r=|A_r|\begin{vmatrix}E_r & O\\ O & B_s\end{vmatrix}$。——譯者注

（ii）假如 $r(F)<n$，因为 $r({}^tF)=r(F)<n$，所以

$$\mathfrak{D}_n(F)=D_n({}^tF)=0.$$

于是

$$D_n({}^tF)=D_n(F)D_n({}^tE_n)=D_n(F)D_n(E_n)=D_n(F).$$

由命题 28 系 2,

$$D_n({}^tF)=\sum \operatorname{sgn}(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)\alpha_{1\nu_1}\alpha_{2\nu_2}\cdots\alpha_{n\nu_n}.$$

例 4 $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n}\\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n}\\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n}\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{nn}.$ （第 2 三角型）。

例 5 $\begin{vmatrix}A_r & O_{r,s}\\ C & B_s\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_r & C\\ O_{s,r} & B_s\end{vmatrix}=|A_r|\cdot|B_s|.$

系 2 $D_n(F_1F_2)=D_n(F_1)D_n(F_2)$.

証明 固定 F_1，命 $D_n(F_1F_2)=\mathfrak{D}_n(F_2)$，那末 $\mathfrak{D}_n:\mathfrak{M}(n,K)\to K$.

（i）假定 $F_1=\begin{pmatrix}{}_1b\\ {}_2b\\ \vdots\\ {}_nb\end{pmatrix}$，$F_2=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，那末

$$F_1F_2=\begin{pmatrix}{}_1ba_1 & {}_1ba_2 & \cdots & {}_1ba_n\\ {}_2ba_1 & {}_2ba_2 & \cdots & {}_2ba_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ {}_nba_1 & {}_nba_2 & \cdots & {}_nba_n\end{pmatrix},$$

所以

$$\mathfrak{D}_n^k\in\mathfrak{L}(K_n,K).$$

（ii）假如 $r(F_2)<n$，那末 $r(F_1F_2)\leqslant r(F_2)<n$. 所以

$$\mathfrak{D}_n(F_2)=D_n(F_1F_2)=0.$$

于是 $\mathfrak{D}_n$ 满足命题 30 中条件，因此

$$D_n(F_1F_2)=\mathfrak{D}_n(F_2)=D_n(F_2)\mathfrak{D}_n(E_n)$$
$$=D_n(F_2)D_n(F_1E_n)=D_n(F_1)D_n(F_2).$$

系 3 假如 F 正則，那末 $D_n(F)\neq 0$。

証明 假定 F 正則，那末存在 F^{-1} 并且 $FF^{-1}=E_n$，所以 $D_n(F)D_n(F^{-1})=D_n(E_n)=1$。因此 $D_n(F)\neq 0$。

由命題 27 系 2 及上面的命題 29 系 3，即得下面定理，它解答了在本节开始提出的第一个問題。

定理 14 矩陣 F 是正則的必要充分条件是它的行列式 $|F|$ 不等于 0。

除去矩陣 $F=(a_{ik})$ 中第 i 行及第 k 列的元素所得的 $(n-1, n-1)$ 型矩陣的行列式，叫做 $D_n(F)$ 的 (i, k) **子行列式**，記为 Δ_{ik}。由命題 27 及命題 29 系 1，因为矩陣中任意两行互换，它的行列式只是改变符号，所以

$$D_n(F)=D_n\begin{pmatrix} {}_1b \\ {}_2b \\ \vdots \\ {}_ib \\ \vdots \\ {}_nb \end{pmatrix}=(-1)^{i-1}D_n\begin{pmatrix} {}_ib \\ {}_1b \\ {}_2b \\ \vdots \\ {}_{i-1}b \\ {}_{i+1}b \\ \vdots \\ {}_nb \end{pmatrix}$$

$$=(-1)^{i-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{ik}\Delta_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{i+k}\Delta_{ik}.$$

$(-1)^{i+k}\Delta_{ik}$ 叫做 a_{ik} 的**余因子**，用 A_{ik} 表示。由上面的結果即得下命題。它的后半段由命題 29 系 1 自明。

命題 30 $D_n(F)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$ （第 i 行展开）

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik} \quad (\text{第 } k \text{ 行展开})。$$

系 $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}D_n(F)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}A_{il}=\delta_{kl}D_n(F)$.

証明 当 $i=j$ 时，由本命題卽得。

当 $i\neq j$ 时，$\sum \alpha_{ik}A_{jk}$ 是 F 的第 j 行換成 $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in})$ 所成矩陣的行列式依第 j 行的展开，但这行列式第 i 行与第 j 行相等，所以等于 0.

定理 15 矩陣 F 是正則时，假如它的第 (i,k) 元素的余因子是 A_{ik}，那末

$$F^{-1}=\frac{1}{D_n(F)}\,{}^t(A_{ik}).$$

証明 假定 $F=(\alpha_{ik})$，那末

$$(\alpha_{ik})\frac{1}{D_n(F)}\,{}^t(A_{ik})=\frac{1}{D_n(F)}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}A_{kj}\right)$$
$$=\frac{1}{D_n(F)}(\delta_{ik}D_n(F))=(\delta_{ik})=E_n.$$

因此(参照 §7，例 12)，

$$F^{-1}=\frac{1}{D_n(F)}\,{}^t(A_{ik}).$$

(証毕)

定理 15 解答了在本节开始提出的第二个問題。

例 6 $D_n(F)=D_n(a_1a_2\cdots a_n)=D_n(a_1\ a_2+\lambda_1a_1\ a_3+\lambda_2a_1\cdots a_n+\lambda_{n-1}a_1)$,

$$D_n(F)=D_n\begin{pmatrix} {}_1b \\ {}_2b \\ {}_3b \\ \vdots \\ {}_nb \end{pmatrix}=D_n\begin{pmatrix} {}_1b \\ {}_2b+\mu_1\,{}_1b \\ {}_3b+\mu_2\,{}_1b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}_nb+\mu_{n-1}\,{}_1b \end{pmatrix}.$$

在实际計算行列式时，可适当挑选上面的 λ_k 或 μ_i，使得 1 列或 1 行中元素只剩下一个而其他都是 0，然后依这列或这行展开。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -11 \\ 0 & 4 & -9 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -11 \\ 4 & -9 & 11 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&1&0\\-11&5&-1\\22&-9&-7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-11&-1\\22&-7\end{vmatrix}=11\begin{vmatrix}-1&1\\2&7\end{vmatrix}$$

$$=11\times(-9)=-99.$$

例 7 当 F 是正則矩陣时，1 次方程 $Fx=y$ 的解是由 $x=F^{-1}y$ 給出(命題 23)。引用定理 15，

$$x=\frac{{}^t(A_{ik})y}{D_n(F)}.$$

因此，假如

$$x=\begin{pmatrix}\xi_1\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}\eta_1\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix},\quad 那末\ \xi_l=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_{il}\eta_i}{D_n(F)}. \tag{1}$$

这里分子是 F 的第 l 列换成 $\begin{pmatrix}\eta_1\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix}$ 所成矩陣的行列式。

(1) 叫做 **Cramer 公式**。

在以下的例 8 和例 9 中，假定 $K=\mathbf{R}$。

例 8

$$\begin{cases}\xi_1+\xi_2-3\xi_3+4\xi_4=5,\\ \quad 2\xi_2+\xi_3-2\xi_4=0,\\ 3\xi_1+2\xi_2-4\xi_3+\xi_4=16,\\ -3\xi_1+\xi_2\qquad-\xi_4=-8.\end{cases}$$

即

$$F=\begin{pmatrix}1&1&-3&4\\0&2&1&-2\\3&2&-4&1\\-3&1&0&-1\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}5\\0\\16\\-8\end{pmatrix}.$$

[解] $D_n(F)=-99\neq0$ (例 6)。因此这联立方程是正則。由 Cramer 公式得

$$\xi_1=\frac{1}{-99}\begin{vmatrix}5&1&-3&4\\0&2&1&-2\\16&2&-4&1\\-8&1&0&-1\end{vmatrix}=3.$$

同样 $\xi_2=0,\ \xi_3=-2,\ \xi_4=-1.$

例 9

$$\begin{cases} \xi_1+2\xi_2-3\xi_3-4\xi_4=\alpha, & (1)\\ -\xi_1+3\xi_2+\xi_3+2\xi_4=\beta, & (2)\\ \xi_1+7\xi_2-5\xi_3-6\xi_4=\gamma, & (3)\end{cases}$$

即
$$F=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 7 & -5 & -6\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}.$$

［解］
$$r(F)=r\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 7 & -5 & -6\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -4\\ 0 & 5 & -2 & -2\\ 0 & 5 & -2 & -2\end{pmatrix}. \tag{4}$$

(把 F 的第一行加于第二行，又自第三行减去第一行即得右边的矩陣。)

在此
$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}=5\neq 0. \tag{5}$$

由(4)的变形，自 F 所作的三次行列式显然都成为 0，所以
$$r(F)=2, \tag{6}$$

因此，所給方程組有解的条件是
$$r(F_1)=r\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -4 & \alpha\\ -1 & 3 & 1 & 2 & \beta\\ 1 & 7 & -5 & -6 & \gamma\end{pmatrix}=2. \tag{7}$$

但象(4)这样的变形(因为沒有行、列的互換)，F 的主部位置不变(請讀者考慮)。因此，由(5)，(6)得知 F_1 的第一列、第二列是无关，第三列、第四列应該是它們的綫性組合。所以条件(7)等价于
$$\begin{vmatrix}1 & 2 & \alpha\\ -1 & 3 & \beta\\ 1 & 7 & \gamma\end{vmatrix}=0 \text{ 即 } 2\alpha+\beta=\gamma. \tag{7'}$$

于是在(7')的条件下，用定理 13 解方程組(1)，(2)，(3)．但由(5)，(6)，这方程組与(1)，(2)两个等价。

$$F_0=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix},\quad F_*=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad (\text{定理 13 的記法}),$$

$$|F_0|=5,\ \text{所以}\ F_0^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

因此，
$$F_0^{-1}y=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\alpha-2\beta\\ \alpha+\beta\end{pmatrix}.$$

所以特殊解

$$x_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}(3\alpha-2\beta)\\ \frac{1}{5}(\alpha+\beta)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

又 $$F_0^{-1}F_*=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-11 & -16\\ -2 & -2\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}F_0^{-1}F_*\\ -E_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{5} & -\frac{16}{5}\\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5}\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

于是一般解

$$x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}(3\alpha-2\beta)\\ \frac{1}{5}(\alpha+\beta)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}\frac{11}{5}\\ \frac{2}{5}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}\frac{16}{5}\\ \frac{2}{5}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

这里 λ, μ 是在 $K=\boldsymbol{R}$ 上变动的参数元。

§13 綫性变換及其不变子空間

如前所述，体 K 上向量空間 V 到它自身的綫性映射叫做 V 的綫性变換，它們全体的集合 $\mathfrak{L}(V,V)=\mathfrak{L}(V)$，是 K 上代数(§7，命題 8)。在 V 取坐标系 φ，于是 $\mathfrak{L}(V)$ 中元 f 可以用 $\mathfrak{M}(n, K)$ 中元 F 表示(§8)。因此，要使 f 的性质明显易得，就需要适当取 φ 使 F 的形状尽可能簡单。假如坐标系自 φ 变为 ψ，坐标变換的(正則)矩陣是 P，那末表示 f 的矩陣自 F 变为 PFP^{-1}. 把 F 变換为 PFP^{-1} 这个事实叫做用 P **变換** F. 当 F_1, $F_2\in\mathfrak{M}(n, K)$ 时，假如存在适合 $F_2=PF_1P^{-1}$ 这样的 n 級正則矩陣 P，那末 F_1,

F_2 叫做**相似**，写成 $F_1 \sim F_2$. 相似关系显然是等价关系。适当取 φ 使表示 f 的矩陣簡单化这个問題，假如作为矩陣的問題来考虑，那就与"变换所給出的矩陣 F 使它的形状尽可能簡单的問題"或"求与 F 相似且形状尽可能簡单的矩陣的問題"相同。这問題的一般解答将在 §15 給出。这里为了簡便叫它做"**問題** A". 在討論这問題 A 时，下述的不变子空間的概念是需要的。

以下首先固定 V 及 $\mathfrak{L}(V)$ 中元 f 来考虑。V 的子空間 W 叫做对于 f **不变**或 f 的**不变子空間**，其意义是 $f(W) \subset W$. 因为 f 固定，所以 f 的不变子空間有时也单称为不变子空間。f 的不变子空間全体的集合用 $\mathfrak{W}_f$ 或簡略地用 $\mathfrak{W}$ 表示(例：$\mathfrak{W} \in \{0\}, V$).

命题 31　假定 $W_1 \in \mathfrak{W}$，那末 f 到 W_1 的縮小 $f_1 = f \mid W_1 \in \mathfrak{L}(W_1)$.

証明　对于 $x, y \in W_1$，$f_1(x) = f(x)$，$f_1(y) = f(y)$，因此 $f_1(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = f_1(x) + f_1(y)$. 同样 $f_1(\lambda x) = \lambda f_1(x)$.

命题 32　当 W_1, $V/W_1 = V^{(1)} \in \mathfrak{W}$ 时，假如对于 $(x)_{W_1} \in V^{(1)}$，使 $(f(x))_{W_1} \in V^{(1)}$ 与之对应的映射是 $f^{(1)}$，那末 $f^{(1)} \in \mathfrak{L}(V^{(1)})$.

証明　設 $(x)_{W_1} = (y)_{W_1}$，即 $x \equiv y \pmod{W_1}$，因为 $x - y \in W_1$，$W_1 \in \mathfrak{W}$，所以 $f(x-y) \in f(W_1) \subset W_1$. 于是 $f(x) \equiv f(y) \pmod{W_1}$，$(f(x))_{W_1} = (f(y))_{W_1}$. 因此 $f^{(1)}$ 的确可以定义为把 $V^{(1)}$ 映于 $V^{(1)}$ 的映射(以下省略 $(x)_{W_1}$ 中的 W_1 单記为 (x))。再因为 $(x) + (y) = (x+y)$，$\lambda(x) = (\lambda x)$，所以 $f^{(1)}((x) + (y)) = f^{(1)}((x+y)) = (f(x+y)) = (f(x) + f(y)) = (f(x)) + (f(y)) = f^{(1)}((x)) + f^{(1)}((y))$. 同样，$f^{(1)}(\lambda(x)) = \lambda f^{(1)}((x))$. 所以 $f^{(1)} \in \mathfrak{L}(V^{(1)})$.

命题 33　假定 V 是有限維，如果 $\dim V = n$，$W_1 \in \mathfrak{W}$，$0 < \dim W_1 = r_1 < n, n = r_1 + r^{(1)}$(因此 $0 < r^{(1)} < n$)，而 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{r_1}\}$ 是 W_1 的一个基底，由 §5 定理 5 系 4，V 的基底可以取 $\{a_1, a_2,$

$\cdots, a_{r_1}, a_{r_1+1}, \cdots, a_n\}$ 形状，那末对于坐标系 $\varphi=\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$f$ 能够用下面形状的矩陣来表示：

$$\begin{pmatrix} F_1 & G \\ O_{r(1),r_1} & F^{(1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r_1 \\ \updownarrow r^{(1)} \end{matrix} \tag{13.1}$$

这里 F_1 是对于 W_1 的基底 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{r_1}\}$ 表示 $f_1=f\,|\,W_1$ 的矩陣，$F^{(1)}$ 是对于 $V^{(1)}$ 的基底 $\{(a_{r_1+1}), \cdots, (a_n)\}$ 表示 $f^{(1)}$ 的矩陣。

証明 因为 $f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_{r_1})\in f(W_1)\subset W_1$，所以在表示 f 的矩陣的最初 r_1 列中后面的 $r^{(1)}$ 个元素都是 0。但 $f_1(a_1)=f(a_1), \cdots, f_1(a_{r_1})=f(a_{r_1})$，所以 F_1 是对于 $\{a_1, \cdots, a_{r_1}\}$ 表示 f_1 的矩陣。

再对于 F 中剩下的 $r^{(1)}$ 列，譬如設 $f(a_{r_1+1})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$，因为

$$f^{(1)}((a_{r_1+1}))=(f(a_{r_1+1}))=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)=\left(\sum_{i=r_1+1}^{n}\lambda_i a_i\right)=\sum_{i=r_1+1}^{n}\lambda_i(a_i),$$

所以 $F^{(1)}$ 是对于 $\{(a_{r_1+1}), \cdots, (a_n)\}$ 表示 $f^{(1)}$ 的矩陣。

系 假如 $V^{(1)}$ 的 r_2 維子空間 W_2 对于 $f^{(1)}$ 不变，$r^{(1)}=r_2+r^{(2)}$（假如必要，和以前一样变动記法），如果 W_2 的基底是$\{(a_{r_1+1}), \cdots, (a_{r_1+r_2})\}$，$V^{(1)}$ 含它的基底是 $\{(a_{r_1+1}), \cdots, (a_n)\}$，那末对于 V 的基底 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$f$ 能够用

$$\begin{pmatrix} F_1 & * & * \\ 0 & F_2 & * \\ 0 & 0 & F^{(2)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r_1 \\ \updownarrow r_2 \\ \updownarrow r^{(2)} \end{matrix} \tag{13.2}$$

形状的矩陣表示。

命題 34 假定 $V=W_1\oplus W_2$，$W_i\in\mathfrak{W}(i=1, 2)$，$\dim V=n$，$\dim W_i=r_i$，因此 $n=r_1+r_2$，$0<r_i<n(i=1,2)$。如果 $W_1=[a_1, \cdots, a_{r_1}]$，$W_2=[a_{r_1+1}, \cdots, a_n]$，于是 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 成为 V 的一个基

底，假如 $\varphi=\varphi(a_1, \cdots, a_n)$，那末对于 φ，f 能够用下面形状的矩陣表示：

$$\begin{pmatrix} F_1 & O_{r_1, r_2} \\ O_{r_2, r_1} & F_2 \end{pmatrix}, \tag{13.3}$$

这里 F_i 是对于基底 $\{a_1, \cdots, a_{r_1}\}$ 或 $\{a_{r_1+1}, \cdots, a_n\}$ 表示 $f_i=f|W_i$ 的矩陣。

証明　与命題 33 証明的前半段同样考察卽可明白。

系　假定 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_k$，$W_i\in\mathfrak{W}$ $(i=1, 2, \cdots, k)$，$\dim V=n$，$\dim W_i=r_i$，因此 $n=r_1+r_2+\cdots+r_k$，$0<r_i<n(i=1, 2, \cdots, k)$． 如果 $W_1=[a_1, \cdots, a_{r_1}]$，$W_2=[a_{r_1+1}, \cdots, a_{r_1+r_2}]$，$\cdots$，$W_k=[a_{r_1+\cdots+r_{k-1}}, \cdots, a_n]$，于是 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 成为 V 的一个基底，假如 $\varphi=\varphi(a_1, \cdots, a_n)$，那末对于 φ，f 能够用下面形状的矩陣表示：

$$\begin{pmatrix} F_1 & O & \cdots & O \\ O & F_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & F_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r_1 \\ \updownarrow r_2 \\ \vdots \\ \updownarrow r_k \end{matrix} \tag{13.4}$$
$$\begin{matrix} \overleftrightarrow{r_1} & \overleftrightarrow{r_2} & \cdots & \overleftrightarrow{r_k} \end{matrix}$$

假定对于 W_i 的基底 $\{a_{r_1+\cdots+r_{i-1}-1}, \cdots, a_{r_1+\cdots+r_i}\}$ 的坐标系是 φ_i，那末对于 φ_i，表示 $f_i=f|W$ 的矩陣是 F_i．

(13.4) 的矩陣今后用 $F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k$ 表示。假如 V 能够分解为不变子空間 W_i 的直和，那末由上系，問題 A 就归結为各个比原来維数低的 W_i 的問題。

§14 特征值，特征多項式，Cayley-Hamilton 定理

假定 V 是体 K 上向量空間，$f\in\mathfrak{L}(V)$，$\alpha\in K$，对于 V 中非 0 元 x，如果

$$f(x)=\alpha x, \tag{14.1}$$

那末 α 叫做 f 的**特征值**。x 叫做 f 属于特征值 α 的**特征向量**。

例 1 假定 $V=\mathfrak{A}(C)$，$\Lambda=D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n$，那末微分方程 $\Lambda y=\alpha y$ 中异于 $y=0$ 的解 $\alpha\in \mathbf{C}$ 是 Λ 的特征值，这时解 y 是 Λ 属于 α 的特征向量。

命题 35 假定 α 是 $f\in\mathfrak{L}(V)$ 的特征值，α 的特征向量全体及 0 的集合是 $W(\alpha)$，当 α 不是 f 的特征值时命 $W(\alpha)=\{0\}$，那末 $W(\alpha)\in\mathfrak{W}_f$。($W(\alpha)$ 叫做 α 的**特征空間**)

証明 因为 $W(\alpha)=\mathrm{Ker}(f-\alpha)$，所以 $W(\alpha)$ 是 V 的子空間。又假如 $x\in W(\alpha)$，那末 $f(x)=\alpha x$，因此 $f^2(x)=f(\alpha x)=\alpha f(x)$。于是 $f(x)\in W(\alpha)$，卽 $f(W(\alpha))\subset W(\alpha)$。所以 $W(\alpha)\in\mathfrak{W}_f$。

本命題能够象下面那样一般化。

因为 $\mathfrak{L}(V)$ 是 K 上代数，假如 $f\in\mathfrak{L}(V)$，那末 $f\cdot f=f^2$，$f\cdot f^2=f^3$，…，$f\cdot f^{\nu-1}=f^\nu$ 也是 $\mathfrak{L}(V)$ 中元，又假如 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu\in K$，那末 $\alpha_0+\alpha_1f+\cdots+\alpha_\nu f^\nu\in\mathfrak{L}(V)$。它可以看成把 f "代入" K 上(卽以 K 中元做系数)变数 X 之多项式 $\Phi(x)=\alpha_0+\alpha_1X+\cdots+\alpha_\nu X^\nu$ 中的結果，写成 $\Phi(f)=\alpha_0+\alpha_1f+\cdots+\alpha_\nu f^\nu$。显然

$$f\cdot\Phi(f)=\Phi(f)\cdot f. \tag{14.2}$$

命題 36 $\mathrm{Ker}\,\Phi(f)\in\mathfrak{W}_f$ (当 $\Phi(f)=f-\alpha$ 时，卽为上命題)。

証明 因为 $\Phi(f)\in\mathfrak{L}(V)$，所以 $\mathrm{Ker}\,\Phi(f)$ 是 V 的子空間。今設 $W=\mathrm{Ker}\,\Phi(f)$。如果 $x\in W$，那末 $\Phi(f)(x)=0$。命 $f(x)=y$，引用 (14.2)，$\Phi(f)(y)=\Phi(f)(f(x))=f(\Phi(f)(x))=0$。所以 $y\in W$，$f(W)\subset W$。 (証毕)

以下假定 V 是有限維的，$\dim V=n$，来考虑前节提出的問題 A。因为 $W(\alpha)$ 是 $\mathfrak{W}$ 中元，由前节命題 33，34，当然能够使問題簡化，但是如果 α 不是特征值，就会有 $\dim W(\alpha)=0$ 的結果。因此求特征值成为重要問題。f 的特征值全体的集合用 $\mathfrak{C}_f$ 或 $\mathfrak{C}$ 表示。

例 2 $\dim W(\alpha)=n$ 时，$V=W(\alpha)$，不論 V 的坐标系如何选取，表示 f 的矩陣是 αE.

命題 37 假定对于某坐标系表示 f 的矩陣是 F，那末

$$\alpha\in\mathfrak{S}\Rightarrow|\alpha E-F|=0.$$

証明 假定 x_0 是属于 α 的一个特征向量，那末 $f(x_0)=\alpha x_0$。所以 $(\alpha E-F)x_0=\alpha x_0-f(x_0)=0$。于是 n 元联立 1 次方程 $(\alpha E-F)x=0$ 的解构成維数大于 1 的子空間，所以 $r(\alpha E-F)\leqslant n-1$。因此 $|\alpha E-F|=0$. (証毕)

由上面証明，即可推得下面的系。

系 $\alpha\in\mathfrak{S}$ 时，$\dim W(\alpha)=d(\alpha E-F)=n-r(\alpha E-F)$，其中 d 表示退化次数，r 表示秩。

假定 F 是 n 級方陣，那末

$$\Phi_F(X)=|XE-F|$$

是 K 上变数 X 的 n 次多項式。它叫做矩陣 F 的**特征多項式**。

例 3 在行列式 $|F|$ 的子行列式中，其主对角綫上元素都是 $|F|$ 的主对角綫上元素者，叫做 $|F|$ 的**主子式**，即

$$|F|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots\alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots\alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots\qquad\vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\cdots\alpha_{nn}\end{vmatrix}\text{ 时，}\begin{vmatrix}\alpha_{\nu_1\nu_1} & \alpha_{\nu_1\nu_2}\cdots\alpha_{\nu_1\nu_k}\\ \alpha_{\nu_2\nu_1} & \alpha_{\nu_2\nu_2}\cdots\alpha_{\nu_2\nu_k}\\ \vdots & \vdots\qquad\vdots\\ \alpha_{\nu_k\nu_1} & \alpha_{\nu_k\nu_2}\cdots\alpha_{\nu_k\nu_k}\end{vmatrix}$$

形状的行列式是 $|F|$ 的主子式。$|F|$ 的 r 次主子式全体的和如果写为 $S_r(F)$，那末❶

$$\Phi_F(X)=X^n-S_1(F)\cdot X^{n-1}+S_2(F)\cdot X^{n-2}+\cdots+(-1)^nS_n(F),$$

---

❶ 由行列式的基本性质，$\Phi_F(X)$ 可以分解为 2^n 个 n 級行列式的和，即

$$\Phi_F(X)=|XE-F|=\begin{vmatrix}X-\alpha_{11} & 0-\alpha_{12} & \cdots & 0-\alpha_{1n}\\ 0-\alpha_{21} & X-\alpha_{22} & \cdots & 0-\alpha_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ 0-\alpha_{n1} & 0-\alpha_{n2} & \cdots & X-\alpha_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=|XE|+\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}D(i_1\cdots i_k),$$ (續下頁脚注)

这里$S_n(F)=|F|$，$S_1(F)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$。把$S_1(F)$写成$S(F)$，叫做$F$的迹（spur或 trace）。

例 4 假定$K=\mathbf{C}$，求$F=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-1&1\\4&-12&1\end{pmatrix}$的特征多项式，特征值及属于各特征值的特征空間。

［解］ $S(F)=1+(-1)+1=1$，

$$S_2(F)=\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&1\\-12&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\4&1\end{vmatrix}$$

$$=-1-2-1+12+1-8=1,$$

$$|F|=\begin{vmatrix}1&2&2\\1&-1&1\\4&-12&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-3&-1\\4&-20&-7\end{vmatrix}=21-20=1,$$

所以特征多项式

$$\Phi_F(X)=X^3-X^2+X-1.$$

F的特征值可以作为$\Phi_F(X)=0$的根来求。由$X^3-X^2+X-1=(X-1)\cdot(X^2+1)=(X-1)(X-i)(X+i)$，得$\mathfrak{C}=\{1,i,-i\}$。

求$W(1)$，解$Fx=x$或$(E-F)x=0$即可。

假定 $x=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}$，那末$\begin{cases}\quad\ -2\xi_2-2\xi_3=0,\\-\xi_1+2\xi_2-\xi_3=0,\\-4\xi_1+12\xi_2\qquad=0,\end{cases}$

解之，得

$$W(1)=\left\{\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix};\ \lambda\in\mathbf{C}\right\}.$$

同样

$$\text{解}\ Fx=ix,\ \text{得}\ W(i)=\left\{\lambda\begin{pmatrix}4+2i\\1+i\\-4\end{pmatrix};\ \lambda\in\mathbf{C}\right\},$$

(續上頁)这里$D(i_1,\cdots,i_k)$表示n級行列式，它的第$i_1,\cdots,i_k$列分别是$-F$的第$i_1,\cdots,i_k$列而其余的$n-k$列(如果存在，即当$k<n$时)分别是矩陣λE相应的列，命$\Delta(i_1,\cdots,i_k)$为F中取第$i_1,\cdots,i_k$列和行所成的k級主子(行列)式。于是

$$\Phi_F(X)=X^n+\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(-1)^kX^{n-k}\Delta(i_1,\cdots,i_k)=X^n\sum_{k=1}^{n}(-1)^kS_kX^{n-k},$$

式中S_k是F中所有k級主子式的和。——譯者注

解 $Fx=-ix$，得 $W(-i)=\left\{\lambda\begin{pmatrix}4-2i\\1-i\\-4\end{pmatrix};\lambda\in\boldsymbol{C}\right\}$.

命題 38 假定 P 是 n 級正則矩陣，那末

$$\Phi_{PFP^{-1}}(X)=\Phi_F(X).$$

証明 $\Phi_{PFP^{-1}}(X)=|XE-PFP^{-1}|=|P\cdot XE\cdot P^{-1}-PFP^{-1}|$
$=|P(XE-F)P^{-1}|=|P||XE-F||P^{-1}|$
$=|XE-F|\cdot|P|\cdot|P^{-1}|=\Phi_F(X)\cdot|PP^{-1}|$
$=\Phi_F(X)$.

系 用例3的記法，$S_i(PFP^{-1})=S_i(F)$，特别 $S(PFP^{-1})=S(F)$.

命題 39 $\Phi_{F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k}=\Phi_{F_1}\cdot\Phi_{F_2}\cdots\Phi_{F_k}$,

$$S(F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k)=S(F_1)+\cdots+S(F_k).$$

証明 假設 $F=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k$，那末

$$XE-F=(XE_{r_1}-F_1)\oplus(XE_{r_2}-F_2)\oplus\cdots\oplus(XE_{r_k}-F_k)$$

(r_i 是 F_i 的級数)。于是

$$\Phi_F(X)=|XE-F|=\Phi_{F_1}(X)\cdot\Phi_{F_2}(X)\cdots\Phi_{F_k}(X)\ (\S 12 例 3),$$

比較这式两边含 X^{n-1} (n 是 F 的級数)項的系数，卽得

$$S(F)=S(F_1)+\cdots+S(F_k). \qquad (証毕)$$

由命題 38 及它的系，得知 Φ_F 和 $S(F)$ 只由 f 确定而与坐标系 φ 无关。事实上，如果改变坐标系，那末 F 变为 PFP^{-1}，但 Φ_F 与 $S(F)$ 对于这变换不变，此已由本命題及系揭示。因此把 Φ_F, $S(F)$ 写成 Φ_f, $S(f)$.

n 次代数方程 $\Phi_f(X)=0$ 叫做 f 或 F 的**特征方程**(或由于在天文学上历史的理由而叫做**永年方程** (seculer equation))。求 f 的特征值解它的特征方程卽可。但是这方程的根不一定都在基础体 K 中(譬如在例 4，因为假定 $K=\boldsymbol{C}$，所以 $\Phi_f(X)=0$ 的根都

在 K 中，但是如果假定 $K=\boldsymbol{R}$，那末 $\Phi_f(X)=0$ 的根 $\pm i$ 不含于 K)。然而由代数学上已知定理(例如，正田，淺野：代数学 I，岩波书店，1952，p. 53)，作含 K 的某个体 K'，在 K' 中就能够含 $\Phi_f(X)$ 的所有根[对給定的体 K 作适当"扩張体"(当然是含 K 的体) $\overline{K}$ 能够使得 K 上"任意"代数方程在 $\overline{K}$ 中具有根(正田，淺野：代数学 I，p. 54)。例如假定 $K=\boldsymbol{R}$，那末作 $\overline{K}=\boldsymbol{C}$ 卽可。根据所謂"代数学的基本定理"以"复数作系数的代数方程的根都在复数体中"]。这时如果 $F\in\mathfrak{M}(n, K)$，当然 $F\in\mathfrak{M}(n, K')$。因此自始卽以 K' 为基础体，那末"特征方程的根都在基础体中"。为了今后簡单起見，假定基础体适当取"大"使这事实能成立。于是显然有下面的命題。

命題 40 $\alpha\in\mathfrak{C}_f\Leftrightarrow\Phi_f(\alpha)=0$。

假定 $\mathfrak{C}_f=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$，(当 $i\neq j$ 时，$\alpha_i\neq\alpha_j$)，
因为 $\Phi_f(X)$ 是最高次系数为 1 的 n 次多项式，

$$\Phi_f(X)=(X-\alpha_1)^{r_1}(X-\alpha_2)^{r_2}\cdots(X-\alpha_k)^{r_k}, \qquad (14.3)$$

$$n=r_1+r_2+\cdots+r_k,\quad n\geqslant r_i\geqslant 1,\quad n\geqslant k\geqslant 1. \qquad (14.4)$$

由命題 36，$\operatorname{Ker}(f-\alpha_i)^{r_i}\in\mathfrak{W}_f$。因为 $\operatorname{Ker}(f-\alpha_i)=W(\alpha_i)$，$\alpha_i\in\mathfrak{C}_f$，所以 $\dim\operatorname{Ker}(f-\alpha_i)>0$。但是"$\mu\leqslant\mu'\Rightarrow\dim\operatorname{Ker}(f-\alpha_i)^{\mu}\leqslant\dim\operatorname{Ker}(f-\alpha_i)^{\mu'}$"，故 $\dim\operatorname{Ker}(f-\alpha_i)^{r_i}>0$。令命 $\operatorname{Ker}(f-\alpha_i)^{\mu}=W_{i,\mu}$，$f\,|\,W_{i,r_i}=f_i$，显然 $W(\alpha_i)=W_{i,1}\subset W_{i,2}\subset\cdots\subset W_{i,r_i}\subset\cdots$。

命題 41 $\dim W_{i,r_i}\geqslant r_i$，适当取 W_{i,r_i} 的基底，能够使表示 f_i 的矩陣含下面形状的 r_i 級第 2 三角型矩陣：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_i & * \\ & & \ddots \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \alpha_i \end{pmatrix}.$$

注意 实际上，在此假如 $\dim W_{i,r_i}=r_i$，自 W_{i,r_i} 适当取基底，那末表示

f_i 的矩陣自身就成为上面的形状，这在稍后即知(定理 16 后面的例 5)。

証明 因为对于任何 i 都一样，所以作为 $i=1$ 来証明。$r_1=1$ 时是明显的。取 α_1 的特征向量 a_1 作为 W_{1,r_1} 的基底中元即可。当 $r_1\geqq 2$ 时，如果把 $[a_1]$ 作为 §13 命题 33 中的 W_1，那末表示 f_1 的矩陣就成为

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ O_{r_1-1,1} & F^{(1)} \end{pmatrix}$$

的形状，因此 f_1 的特征多项式显然是 $(X-\alpha_1)\Phi_{F^{(1)}}(X)$。另一方面它等于(11.3)，因为 $r_1\geqq 2$，所以 $\Phi_{F^{(1)}}(X)=0$ 具有根 $X=\alpha_1$。由命题 40，α_1 是 $F^{(1)}$ 的特征值，于是 α_1 的 (对于 $F^{(1)}$ 的) 特征空間的維数大于零。因此由 §13 命题 33 的系，适当取 V 的基底，那末 f_1 的矩陣就成为

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_1 & * \\ 0_{r_1-2,2} & & F^{(2)} \end{pmatrix}$$

的形状，所以不得不 $\dim W_{1,r_1}\geqq 2$。假如 $r_1\geqq 3$，同样更进一步就能够得到 $\dim W_{1,r_1}\geqq 3$。重复这个方法(严密地，由数学归納法)，命题即得到証明。

命题 42 假設 $W_{i,r_i}=W_i$，那末 $W_1, \cdots, W_k$ 无关。

証明 由 §4 定理 1，証明 $x_1+\cdots+x_k=0,\ x_i\in W_i\Rightarrow x_i=0$ 即可。H. Weyl 曾用如下的巧妙的方法来証明。

假如根据(14.3)把 $1/\Phi_f(X)$ 分为部分分式，

$$\frac{1}{\Phi_f(X)}=\frac{\Phi^{(1)}(X)}{(X-\alpha_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{\Phi^{(k)}(X)}{(X-\alpha_k)^{r_k}}. \tag{14.5}$$

命

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_f(X)}{(X-\alpha_i)^{r_i}}&=(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_{i-1})^{r_{i-1}}(X-\alpha_{i+1})^{r_{i+1}}\cdots(X-\alpha_k)^{r_k}\\&=\Psi^{(i)}(X),\end{aligned} \tag{14.6}$$

$$\Phi^{(i)}(X)\Psi^{(i)}(X)=\Psi_i(X), \tag{14.7}$$

$$\Psi_i(f)=g_i\in\mathfrak{L}(V), \tag{14.8}$$

于是由(14.5)，

$$\Psi_1(x)+\cdots+\Psi_k(x)=1,$$

所以

$$g_1+\cdots+g_k=e_V \quad (V\text{ 的恒等映射})。 \tag{14.9}$$

又假設 $x_i\in W_i$，因为 $(f-\alpha_i)^{r_i}(x_i)=0$，由(14.6)，(14.7)，(14.8)立即得到

$$i\neq j\Rightarrow g_j(x_i)=0. \tag{14.10}$$

于是考慮 $x_1+\cdots+x_k=0$，$x_i\in W_i$，两边对于 g_1 的象，根据(14.10)即得 $g_1(x_1)=0$，但由(14.9)，(14.10)，$g_1(x_1)=x_1$，因此 $x_1=0$. 同样 $x_2=\cdots=x_k=0$.

用上面結果能够証明下面的定理。

定理 16 假定 f 是 n 維向量空間 V 的綫性变换，它的特征值 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 都在基础体 K 中，这时如果 f 的特征多项式 $\Phi_f(X)$ 因式分解为

$$\Phi_f(X)=(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_k)^{r_k}$$

的形状，$\mathrm{Ker}(f-\alpha_i)^{r_i}=W_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，那末 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$，$\dim W_i=r_i$，假如 $f|W_i=f_i$，那末 f_i 的特征多項式是 $(X-\alpha_i)^{r_i}$.

証明 由命題 42，$W_1,\cdots,W_k$ 是无关，所以 $V\supset W_1+\cdots+W_k=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$. 由§5 定理 5 的系 4 及命題 41，$\dim(W_1\oplus\cdots\oplus W_k)=\sum\dim W_i\geqslant\sum r_i$. 因此 $\dim V=n\geqslant\sum r_i$. 另一方面，由(14.4)，$n=\sum r_i$，因此在命題 41 的結論中不等号不能成立。又因为适当取 W_i 的基底，表示 f_i 的矩陣能够成为 α_i 恰好在主对角綫上的 r_i 級三角型，于是它的特征多項式是 $(X-\alpha_i)^{r_i}$. 再因为 $\dim V=\dim\sum\oplus W_i$，所以

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k.$$

例 5 命题 41 后面的"注意"事項可由上面的証明得知。

例 6 用(14.8)定义的 g_i 是自 V 到 W_i 的射影（§7 例4）。又 $f\circ g_i=f_i$.

于是由这定理及 §13 命題 34，我們的問題 A 归結为 f 的特征多項式属于 $(X-\alpha)^r$ 形状的情况。这时由于基底的选擇，显然表示 f 的矩陣能够成为三角型。問題 A 的最后解决让于下节。由上面的結果容易推得下面 Cayley-Hamilton 的重要定理。

定理 17 (Cayley-Hamilton 定理) 假定 F 是任意方陣，$\Phi_F(X)$ 是它的特征多項式，那末 $\Phi_F(F)=0$.

例 7 就例 4 的情形来說明 Cayley-Hamilton 定理。

[解] $F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & -12 & 1\end{pmatrix}$，所以 $F^2=\begin{pmatrix}11 & -24 & 6\\ 4 & -9 & 2\\ -4 & 8 & -3\end{pmatrix}$.

$$\Phi_F(X)=X^3-X^2+X-1=(X-1)(X^2+1),$$

因此 $\Phi_F(F)=(F-E)(F^2+E)$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & -12 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12 & -24 & 6\\ 4 & -8 & 2\\ -4 & 8 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

为了証明 Cayley-Hamilton 定理，首先証明下面两个引理。

引理 3 当 $\Psi(X)$ 是 X 的任意多項式时，如果

$$F=F_1\oplus\cdots\oplus F_k,$$

那末
$$\Psi(F)=\Psi(F_1)\oplus\cdots\oplus\Psi(F_k).$$

証明 一般假定 A 与 A', B 与 B', …, L 与 L' 分别是同級的方陣，显然

$$(A\oplus B\oplus\cdots\oplus L)+(A'\oplus B'\oplus\cdots\oplus L')=(A+A')\oplus\cdots\oplus(L+L'),$$

$$\alpha(A\oplus B\oplus\cdots\oplus L)=\alpha A\oplus+\alpha B\oplus\cdots\oplus\alpha L,$$

$$(A\oplus B\oplus\cdots\oplus L)(A'\oplus B'\oplus\cdots\oplus L')=AA'\oplus BB'\oplus\cdots\oplus LL'.$$

重复引用此事实，即容易得到引理。

引理 4 假定 F 是象下面那样主对角綫上元素都是 0 的 n 級

三角型矩陣，

$$F=\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

那末 $F^n=0$。

証明 由計算

$$F^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},\quad F^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},\quad \cdots$$

所以 $F^n=0$。

象这样自乘若干同成为 0 的矩陣，叫做冪零。一般，对于环 S 中元 x，存在使 $x^n=0$ 的自然数 n 时，x 叫做 S 的**冪零元**。

Cayley-Hamilton 定理的証明 証明 $\Phi_f(f)=0$ 即可。由定理 16，分解

$$\Phi_f(X)=(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_k)^{r_k},$$

适当取 $W_i=\mathrm{Ker}(f-\alpha_i)^{r_i}$ 的基底，那末 $f|W_i=f_i$ 可以用矩陣 $F_i^*=\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i \end{pmatrix}}_{r_i}$ 表示。因为 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_k$，合并 W_i 这样的基底就得到 V 的基底，由此，f 可以用矩陣

$$F^*=F_1^*\oplus F_2^*\oplus\cdots\oplus F_k^*$$

表示。于是就这 F^* 来証明 $\Phi_f(F^*)=0$ 即可。

由引理 3，

$$\Phi_f(F^*)=\Phi_f(F_1^*)\oplus\Phi_f(F_2^*)\oplus\cdots\oplus\Phi_f(F_k^*).$$

在右边，譬如

$$\Phi_f(F_1^*) = (F_1^* - \alpha_1 E)^{r_1} \cdots (F_1^* - \alpha_k E)^{r_k},$$

因为

$$F_1^* - \alpha_1 E = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{r_1},$$

由引理 4，$(F_1^* - \alpha_1 E)^{r_1} = 0$. 因而 $\Phi_f(F_1^*) = 0$. 同样 $\Phi_f(F_2^*) = 0$, $\cdots$, $\Phi_f(F_k^*) = 0$, 所以 $\Phi_f(F^*) = 0$.

§15 Jordan 标准形

在 §14 中已把 §13 提出的問題 A 归結为 f 的特征多項式 $\Phi_f(X)$ 是 $(X-\alpha)^n$, $n = \dim V$ 形状的情况。以下就此情况来解答問題 A.

由 §14 命題 41 后面的注意（参照定理 16 后面的例 5），这时适当选取 φ，能够使 F 成为

$$\begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$$

形状，因此由定理 17，$(f-\alpha)^n = 0$. 命 $f - \alpha = g$，那末 $g^n = 0$. 即 g 是 $\mathfrak{L}(V)$ 的幂零元。又适当选取 φ，因为表示 g 的矩陣为

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $\mathfrak{C}_g = \{0\}$.

于是对于 $i = 0, 1, 2, \cdots$，命

$$\operatorname{Ker} g^i = V^{(i)}, \quad \dim V^{(i)} = d^{(i)} \tag{15.1}$$

（但 $g^0 = e_V$（恒等映射）），显然

$$V^{(0)} = \{0\} \subset V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset \cdots \subset V^{(n)} = V,$$

$$0=d^{(0)}\leqslant d^{(1)}\leqslant d^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant d^{(n)}=n. \tag{15.2}$$

命题 43 在(15.2)中，

$$0=d^{(0)}<d^{(1)}, \tag{15.3}$$

又对于某个自然数 μ，假如

$$d^{(\mu)}=d^{(\mu+1)}, \tag{15.4}$$

那末

$$d^{(\mu+1)}=d^{(\mu+2)}=\cdots=n. \tag{15.5}$$

証明 (15.3)意味着 $V^{(1)}=\mathrm{Ker}\,g$ 含有非0的向量，因为由上面可知0是 g 的特征値，所以这是显然的。

又(15.4)$\Rightarrow$(15.5)意味着"$V^{(\mu)}=V^{(\mu+1)}\Rightarrow V^{(\mu+1)}=V^{(\mu+2)}$"，即假定"$g^{\mu+1}(x)=0\Rightarrow g^{\mu}(x)=0$，那末 $g^{\mu+2}(y)=0\Rightarrow g^{(\mu+1)}(y)=0$"，这命 $x=g(y)$ 即得。 (証毕)

設在数列 $d^{(0)}, d^{(1)}, \cdots, d^{(n)}$ 中使(15.4)成立的 μ 的最小数是 ν，由(15.3)，$1\leqslant\nu$ (当然 $\nu\leqslant n$)．于是

$$d^{(0)}=0<d^{(1)}<d^{(2)}<\cdots<d^{(\nu)}=n=d^{(\nu+1)}=\cdots,$$

$$V^{(0)}=\{0\}\subsetneqq V^{(1)}\subsetneqq V^{(2)}\subsetneqq\cdots\subsetneqq V^{(\nu)}=V.$$

首先，$\nu=1$ 的情形是简单的，这时因为

$$V^{(1)}=\mathrm{Ker}\,g=\mathrm{Ker}\,(f-\alpha)=V,$$

所以 $g=0$，$f=\alpha$．因此 V 的基底不論怎样选取，表示 f 的矩陣是 αE.

以下考虑 $\nu\geqslant2$ 的情形，这时命

$$d^{(i)}-d^{(i-1)}=e^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,\nu. \tag{15.6}$$

因为 $d^{(0)}=0$，$d^{(i-1)}<d^{(i)}$，$d^{(\nu)}=n$，所以

$$e^{(1)}=d^{(1)},\ e^{(i)}>0,\ \sum_{i=1}^{\nu}e^{(i)}=n.$$

在$V^{(i)}$ 中能够取 $e^{(i)}$ 个关于 $\mathrm{mod}\ V^{(i-1)}$ 无关的向量

$$x^{(i,1)},\ \cdots,\ x^{(i,e^{(i)})}, \tag{15.7}$$

把它們合并起来，显然就得到 V 的基底。

为了解答我們的問題 A，在 V 中就选取那样的基底，对于它的坐标系假定是 φ，但是在选取那基底时，还須注意下面的事实。

命題 44 当 $1\leqslant i\leqslant \nu-2$ 时，假如 (15.7) 是 $V^{(i)}$ 中关于 $\bmod V^{(i-1)}$ 无关的向量，那末

$$g(x^{(i,1)}),\ \cdots,\ g(x^{(i,e^{(i)})}) \tag{15.7'}$$

就是 $V^{(i-1)}$ 中关于 $\bmod V^{(i-2)}$ 无关的向量。因此 $e^{(i)}\leqslant e^{(i-1)}$。

証明 (15.7′) 的向量是 $V^{(i-1)}$ 中元意味着 $g^{(i-1)}(g(x^{(i,1)}))$，$\cdots$，$g^{(i-1)}(g(x^{(i,e^{(i)})}))$ 都是 0，这由 $x^{(i,1)},\cdots,x^{(i,e^{(i)})}\in V^{(i)}$，即 $g^{i}(x^{(i,1)})=0$ 可以明白。又 (15.7′) 的向量关于 $\bmod V^{(i-2)}$ 无关就意味着

$$\lambda_1 g(x^{(i,1)})+\cdots+\lambda_{e^{(i)}}g(x^{(i,e^{(i)})})\in V^{(i-2)}\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_{e^{(i)}}=0,$$

这由 (15.7) 的向量关于 $\bmod V^{(i-1)}$ 无关立即明白。 (証毕)

今对于 i 的某个給定值，(15.7) 的向量用 $(\eta)_i$ 表示，那末合并

$$(\eta)_1,\ (\eta)_2,\ \cdots,\ (\eta)_{\nu-1},\ (\eta)_\nu$$

就成为 V 的基底，但是引用命題 44，它可以象下面那样来选取。

首先，任意选 $(\eta)_\nu$：$x^{(\nu,1)},\ \cdots,\ x^{(\nu,e^{(\nu)})}$，为了簡单，它們用 $x^{(1)}$，$\cdots$，$x^{(e^{(\nu)})}$ 表示。

由命題 44，这时能够选取

$$g(x^{(1)}),\ \cdots,\ g(x^{(e^{(\nu)})})$$

作为 $(\eta)_{\nu-1}$ 的一部分（现在我們假定 $\nu\geqslant 2$）。假如 $e^{(\nu)}=e^{(\nu-1)}$，那末它就是 $(\eta)_{\nu-1}$ 的全部。不拘怎样，取它作为 $(\eta)_{\nu-1}$ 的一部（或全部），当 $e^{(\nu)}<e^{(\nu-1)}$ 时，任意附加 $V^{(\nu-1)}$ 中 $e^{(\nu-1)}-e^{(\nu)}$ 个关于 $\bmod V^{(\nu-2)}$ 无关的向量 $x^{(e^{(\nu)}+1)},\ \cdots,\ x^{(e^{(\nu-1)})}$，使之成为 $(\eta)_{\nu-1}$。更設 $\nu\geqslant 3$，考虑

$$g^2(x^{(1)}),\ \cdots,\ g^2(x^{(e^{(\nu)})}),\ \ g(x^{(e^{(\nu)}+1)}),\ \cdots,\ g(x^{(e^{(\nu-1)})}),$$

因为它們是 $V^{(\nu-2)}$ 中关于 $\bmod V^{(\nu-3)}$ 无关的向量，所以它們成为 $(\eta)_{\nu-2}$ 的一部分（或全部）。这样，继續 ν 回就得到 $\nu e^{(\nu)}$ 个向量

$$x^{(i)},\ g(x^{(i)}),\ \cdots,\ g^{\nu-1}(x^{(i)}),\quad i=1,\ \cdots,\ e^{(\nu)},\tag{15.8}$$

$(\nu-1)(e^{(\nu-1)}-e^{(\nu)})$ 个向量

$$x^{(j)},\ g(x^{(j)}),\ \cdots,\ g^{\nu-2}(x^{(j)}),\quad j=e^{(\nu)}+1,\ \cdots,\ e^{(\nu-1)}\tag{15.9}$$

等等，把它們合并后就得

$$\nu e^{(\nu)}+(\nu-1)(e^{(\nu-1)}-e^{(\nu)})+\cdots+1(e^{(1)}-e^{(\nu)})=\sum e^{(i)}=n$$

个无关向量，即 V 的基底。

于是用(15.8)中 ν 个向量生成的子空間 $[x^{(i)},\ \cdots,\ g^{\nu-1}(x^{(i)})]=W^{(i)}$ 由 $g^{\nu}=0$ 容易得知是 g 的（因而又是 $f=g+\alpha$ 的）不变子空間。V 显然是 $e^{(\nu)}$ 个 ν 維不变子空間 $W^{(1)},\ \cdots,\ W^{(e^{(\nu)})}$；$(e^{(\nu-1)}-e^{(\nu)})(\geqq 0)$ 个 $(\nu-1)$ 維不变子空間 $W^{(e^{(\nu)}+1)},\ \cdots,\ W^{(e^{(\nu-1)})}$ 等等的直和。假如对于 $W^{(i)}$ 的基底表示 $g|W^{(i)}=g^{(i)}$，$f|W^{(i)}=f^{(i)}$ 的矩陣分别是 $G^{(i)}$，$F^{(i)}$，那末 g，f 可以分别用矩陣 $G^{(1)}\oplus G^{(2)}\oplus\cdots$，$F^{(1)}\oplus F^{(2)}\oplus+\cdots$ 来表示。

現在就 $i=1$ 来考虑，$W^{(1)}$ 的基底仍旧取(15.8)的向量，但是改变番号，命

$$a_1=g^{\nu-1}(x^{(1)}),\ a_2=g^{\nu-2}(x^{(1)}),\ \cdots,\ a_{\nu}=x^{(1)}.\tag{15.10}$$

取此作为基底，那末表示 $g^{(1)}$ 的矩陣显然是

$$G^{(1)}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\Big\updownarrow\nu$$

的形状。因此对于同样基底来表示 $f|W^{(1)}=f^{(1)}=g^{(1)}+\alpha$，就得到

$$F^{(1)}=\begin{pmatrix}\alpha&1&0&\cdots&0\\0&\alpha&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&\alpha\end{pmatrix}\Big\updownarrow\nu\tag{15.11}$$

形状的矩陣。这右边的矩陣用 $J(\alpha,\nu)$ 表示(于是 $G^{(1)}=J(0,\nu)$)。当 $e^{(\nu-1)}>e^{(\nu)}$ 时，对于 $e^{(\nu)}+1\leqslant j\leqslant e^{(\nu-1)}$ 的 j 作同样的考慮，由(15.9)，容易得知 $f|W^{(j)}=f^{(j)}$ 是用矩陣 $J(\alpha,\nu-1)$ 表示。

綜合以上事实，在我們的假定下，得到下面解答問題 A 的定理。

定理 18 假定 f 是 n 維向量空間 V 的綫型变换，它的特征多項式 $\Phi_f(X)$ 是 $(X-\alpha)^n$ 的形状，那末适当取 V 的坐标系 φ，就能够用下面形状的矩陣表示 f，

$$\underbrace{J(\alpha,\nu)+\cdots+J(\alpha,\nu)}_{e^{(\nu)}\text{个}}+\underbrace{J(\alpha,\nu-1)+\cdots+J(\alpha,\nu-1)}_{(e^{(\nu-1)}-e^{(\nu)})\text{个}}+\cdots, \tag{15.12}$$

这里 $J(\alpha,\nu)$ 是用(15.11)定义的矩陣，$e^{(i)}$ 是用(15.1)，(15.6)定义的自然数，

$$\begin{aligned}e^{(i)}=d^{(i)}-d^{(i-1)}&=\dim \operatorname{Ker}(f-\alpha)^i-\dim \operatorname{Ker}(f-\alpha)^{i-1}\\&=d(f-\alpha)^i-d(f-\alpha)^{i-1}=r(f-\alpha)^{i-1}-r(f-\alpha)^i.\end{aligned}$$

(d 是退化次数，r 是秩)。因此

$$0<e^{(\nu)}\leqslant e^{(\nu-1)}\leqslant\cdots\leqslant e^{(1)}=\dim \operatorname{Ker}(f-\alpha).$$

系 用上面的記法，$(f-\alpha)^\nu=0$.

ν 叫做 f (或表示它的矩陣) 的**簡約次数** (这概念在这里是就特征多項式为 $(X-\alpha)^n$ 形状的变换(或矩陣)来定义的)。

(15.12)形状的矩陣一般用 $J(\alpha)$ 表示，($J(\alpha,\nu)$ 是由 α 与 ν 确定的 ν 級矩陣，但 $J(\alpha)$ 当然不能作为由 α 确定的矩陣。$J(\alpha)$ 只是表示"矩陣的形状")。这时，$J(\alpha_1)\oplus J(\alpha_2)\oplus\cdots\oplus J(\alpha_k)$ 形状的矩陣叫做 **Jordan 标准形**。

由定理 16，18，得到下面关于問題 A 的决定結果。

定理 19 假定 f 是向量空間 V 的綫性变换，它的特征多項式是

$$\Phi_f(X)=(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_k)^{r_k}, \tag{15.13}$$

这时，适当取 V 的坐标系 φ，则 f 能够用

$$J(\alpha_1)\oplus\cdots\oplus J(\alpha_k) \tag{15.14}$$

形状的 Jordan 标准形矩陣表示。

証明 由定理 16，自 (15.13) 命 $\mathrm{Ker}(f-\alpha_i)^{r_i}=W_i$，那末 V 直和分解为 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$，$\dim W_i=r_i$，假定 $f|W_i=f_i$，那末 f_i 的特征多项式为 $(X-\alpha_i)^{r_i}$。由定理 18，对于 W_i 取适当基底，f_i 能够用 $J(\alpha_i)$ 形状的矩陣表示。把它們合并后所成的 V 的基底，由它确定的坐标系作为 φ 即可。

系 1 假定 f_i 的簡約次数是 ν_i，

$$\Psi_f(X)=(X-\alpha_1)^{\nu_1}\cdots(X-\alpha_k)^{\nu_k},$$

那末 $$\Psi_f(f)=0.$$

ν_i 叫做 f 对于特征值 α_i 的簡約次数，$\Psi_f(X)$ 的次数 $\nu_1+\cdots+\nu_k$ 叫做 f 的**簡約次数**。

系 2 当 n 級方陣 F 已給定时，取适当的 n 級正則矩陣 P 能够使得 PFP^{-1} 成为 Jordan 标准形。

注意 上面是取(15.10)作为 $W^{(1)}$ 的基底，假如取与(15.8)同样的顺序(改变(15.10)的記号)附加番号成为

$$a_1=x^{(1)},\ a_2=g(x^{(1)}),\ \cdots,\ a_\nu=g^{\nu-1}(x^{(1)}),$$

以这作为基底，那末所得到的表示 $f^{(1)}$ 的矩陣是(15.11)中 $F^{(1)}$ 的 ${}^tF^{(1)}$ (矩陣的形状由第2三角型变为第1三角型)。这样就得到上述"Jordan 标准形矩陣"的轉置矩陣，有时也叫这种形状为"Jordan 标准形"。

例 1 f 能够用对角綫型矩陣表示的必要充分条件是 f 对于各个特征值的簡約次数都是 1，卽 $\nu_1=\nu_2=\cdots=\nu_k=1$。特别，

$$\Phi_f(X)=(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n),\quad i\neq j\Rightarrow\alpha_i\neq\alpha_j$$

时，f 能够用对角綫型矩陣表示。

[解] 假定 $\Phi_f(X)=(X-\alpha_1)^{r_1}(X-\alpha_2)^{r_2}\cdots(X-\alpha_k)^{r_k}$，

命 $W_i=\mathrm{Ker}(f-\alpha_i)^{r_i}$，$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_k$，$\dim W_i=r_i$，

$f_i=f|W_i$ 的簡約次数是 ν_i。如果 $\nu_i=1$，象命題 44 后面所述的那样，f_i 的

矩陣能够用 $F_i=\alpha_i E_{r_i}$ 表示，所以 f 能够用

$$F=\alpha_1 E_{r_1}\oplus\alpha_2 E_{r_2}\oplus\cdots\oplus\alpha_k E_{r_k}$$

表示。它是对角綫型矩陣。

反之，如果 f 能够用这样的对角綫型矩陣表示，則显然对于各个特征值 α_i 的簡約次数 ν_i 都是 1。

例 2 就 § 14 例 4，例 7 中提出的

$$F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & -12 & 1\end{pmatrix}$$

来解答問題 A.

［解］ 象在 § 14 例 4 中那样，$\Phi_f(X)=(X-1)(X-i)(X+i)$，并且 $W_1=\mathrm{Ker}(F-E)=W(1)$，$W_2=\mathrm{Ker}(F-iE)=W(i)$，$W_3=\mathrm{Ker}(F+iE)=W(-i)$ 的基底能够分别选取

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}4+2i\\ 1+i\\ -4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}4-2i\\ 1-i\\ -4\end{pmatrix}.$$

以 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ 作为 V 的基底，假如把坐标变为由它所确定的坐标，那末 F 应該用矩陣 F_0 来表示，

$$F_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{pmatrix}.$$

假設坐标变换的矩陣是 P，显然

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4+2i & 4-2i\\ 1 & 1+i & 1-i\\ -1 & -4 & -4\end{pmatrix},$$

因此

$$P=(P^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ \dfrac{-1+3i}{4} & \dfrac{1-4i}{2} & \dfrac{-1+i}{4}\\ \dfrac{-1-3i}{4} & \dfrac{1+4i}{2} & \dfrac{-1-i}{4}\end{pmatrix}.$$

由实际計算得

$$PFP^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ \frac{-1+3i}{4} & \frac{1-4i}{2} & \frac{-1+i}{4} \\ \frac{-1-3i}{4} & \frac{1+4i}{2} & \frac{-1-i}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4+2i & 4-2i \\ 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ \frac{-3-i}{4} & \frac{4+i}{2} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{-3+i}{4} & \frac{4-i}{2} & \frac{-1+i}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4+2i & 4-2i \\ 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

例 3 假設 $K=C$，試將

$$F=\begin{pmatrix} -4 & 9 & -4 \\ -9 & 18 & -8 \\ -15 & 29 & -13 \end{pmatrix}$$

变为 Jordan 标准形。

［解］ 求出特征多项式

$$\Phi_F(X)=X^3-X^2-X+1=(X-1)^2(X+1),$$

命

$$W_1=\operatorname{Ker}(F-E)^2\supset W_1'=\operatorname{Ker}(F-E),\quad W_2=\operatorname{Ker}(F+E).$$

解

$$(F-E)x=\begin{pmatrix} -5 & 9 & -4 \\ -9 & 17 & -8 \\ -15 & 29 & -14 \end{pmatrix}x=0,\ 得\ W_1'=\left\{\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda\in C\right\}.$$

解

$$(F-E)^2x=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 12 & -24 & 12 \\ 24 & -48 & 24 \end{pmatrix}x=0,\ 得\ W_1=\left\{\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ \lambda,\mu\in C\right\}.$$

解

$$(F+E)x=\begin{pmatrix} -3 & 9 & -4 \\ -9 & 19 & -8 \\ -15 & 29 & -12 \end{pmatrix}x=0,\ 得\ W_2=\left\{\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix};\ \lambda\in C\right\}.$$

兹求作以 Jordan 标准形表示 F 的基底。首先取 W_1 中对于 $\operatorname{mod} W_1'$ 无关的向量 $a_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，次取 $a_1=(F-E)a_2=\begin{pmatrix} -5 & 9 & -4 \\ -9 & 17 & -8 \\ -15 & 29 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 作

为 W_1' 的基底。因此 $W_1=\left[\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right]$. 再取 $a_3=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$ 作为 W_2 的基底，于是 F 应該用 Jordan 标准形 $F_0=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&0\\\hline 0&0&-1\end{array}\right)$ 表示。

坐标变换的矩陣 P，由

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&1&3\\-1&0&6\end{pmatrix},\quad 則\ P=\begin{pmatrix}6&-12&5\\3&-5&2\\1&-2&1\end{pmatrix},$$

实际計算得

$$PFP^{-1}=\begin{pmatrix}6&-12&5\\3&-5&2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&9&-4\\-9&18&-8\\-15&29&-13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&1&3\\-1&0&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&-12&5\\3&-5&2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&-3\\-1&-1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

§16 Euclid 空間

我們在 §1 中說明了，对于“在力学上使用的向量”，A, B, C 三个事实都成立。在 §3 中，根据重述的 A, B, C 定义了作为代数系的“向量空間”，这样一直論述到現在。但是对于“在力学上使用的向量”，能够成立的事实很多，不仅只是 A, B, C(及自它导出的事实) 而已。从这些事实之中，我們所以特别抽出 A, B, C 是因为只由它們就能够导出其他各种事实，正象直到現在所看到的那样。又滿足 A, B, C 的“向量空間”，出現在数学的各部門中。A, B, C 确是数学家根据經驗与智慧所发現的“好公理”。

下面討論“在力学上使用的向量”的另一有用性质（不含于

A, B, C)，这就是向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 間所定义的内积 $\boldsymbol{xy}$。下面关于内积的一些性质，想讀者已經知道。

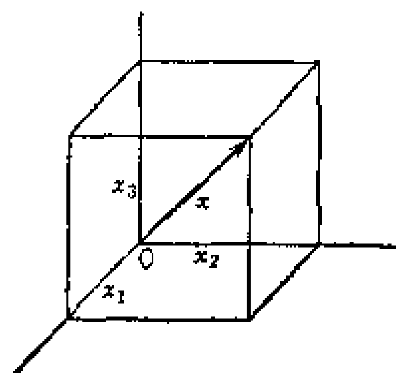


图 16.1

（i）假定对于空間直交坐标，

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3),$$

$$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3),$$

那末 $\boldsymbol{xy}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

（ii）$\boldsymbol{xy}=\boldsymbol{yx}$,

$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}$,

对于 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，有 $(\alpha\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=\alpha(\boldsymbol{xy})$.

（iii）假定 $\boldsymbol{xx}=\boldsymbol{x}^2$，那末 $\boldsymbol{x}^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant 0$，$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\boldsymbol{x}^2}$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的长，并且 $\boldsymbol{x}=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{x}|=0$.

（iv）假定 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 之間的夹角是 θ，那末

$$\boldsymbol{xy}=|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|\cos\theta.$$

特别， $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}\Rightarrow\boldsymbol{xy}=0$.

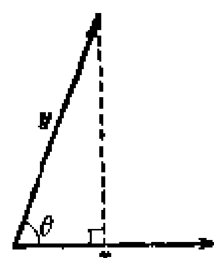


图 16.2

把以上作为模型，当 $\boldsymbol{R}$ 上向量空間 V 满足下面的条件时，我們叫 V 做 **Euclid 的**。Euclid 向量空間叫做**一般 Euclid 空間**，有限維的一般 Euclid 空間叫做 **Euclid 空間**。

E1．对于 x, $y\in V$，有 $\boldsymbol{R}$ 中元 xy 与之对应，xy 叫做 x, y 的**内积**。

E2．$xy=yx$.

E3．$(x_1+x_2)y=x_1y+x_2y$.

E4．对于任意 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，$(\alpha x)y=\alpha(xy)$.

E5．$xx=x^2\geqslant 0$，$x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

例 1 把 y 固定，假定 $f(x)=xy$，那末 $f\in\mathfrak{L}(V, \boldsymbol{R})$，特别，

$$0\cdot y=0.$$

把 x 固定，假定 $g(y)=xy$，那末 $g\in\mathfrak{L}(V, \boldsymbol{R})$，特别，

$$x \cdot 0 = 0.$$

例 2　当 V 是 $\boldsymbol{R}$ 上 n 維向量空間时，固定 V 的坐标系 φ，对于

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \qquad \varphi(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

命 $xy = {}^t\varphi(x)\,\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$，那末 V 成为 Euclid 的。

特别，$\boldsymbol{R}^n$ 是根据 $xy = {}^t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ 形成的 Euclid 空間。

例 3　假定 $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$，区間 $[\alpha, \beta] = \varDelta$，对于 $\mathfrak{C}(\varDelta, \boldsymbol{R})$（§ 3，例 10）中元 $f, g, \cdots$，规定

$$fg = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx,$$

那末 $\mathfrak{C}(\varDelta, \boldsymbol{R})$ 成为 Euclid 空間。

例 4　因为由 E 4，$x^2 \geqslant 0$，所以 $\sqrt{x^2} \in \boldsymbol{R}$，$\sqrt{x^2} = |x|$ 叫做 x 的**长**，

$$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x| \quad (\text{由 E 2, E 3}),$$
$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{由 E 4}).$$

一般 Euclid 空間中长是 1 的元叫做**单位向量**。

以后如不預先声明，V 作为一般 Euclid 空間，$x, y, \cdots$ 表示它的元。

命題 45　$(xy)^2 \leqslant x^2 y^2$ (Cauchy-Schwarz 不等式)

証明　对于任意 $\xi \in \boldsymbol{R}$，

$$0 \leqslant (\xi x + y)^2 = \xi^2 x^2 + 2\xi(xy) + y^2.$$

右边是 ξ 的二次三項式，因为它的符号一定，所以判别式不得不 $\leqslant 0$，即

$$(xy)^2 - x^2 y^2 \leqslant 0.$$

例 5❶　$x \neq 0$，$|x||y| = xy \Rightarrow y = \alpha x$，$\alpha \geqslant 0$.

---

❶　假如 $(xy)^2 - x^2y^2 = 0$，即 $(xy)^2 = x^2y^2$. 这就是說二次三項式 $\xi^2x^2 + 2\xi(xy) + y^2$ 的判别式 $= 0$，因此它有一个实根 $\xi_0 = -\frac{xy}{x^2}$. 于是 $(\xi_0 x + y)^2 = 0$，由 E 5，$\xi_0 x + y = 0$，所以 $y = -\xi_0 x$. 因为 $x^2 > 0$，$|x| \geqslant 0$，$|y| \geqslant 0$，当 $|x| \cdot |y| = xy$ 时，$xy > 0$，因此 $\xi_0 < 0$. 当 $|x| \cdot |y| = -xy$ 时，$xy < 0$，因此 $\xi_0 > 0$. 令 $\alpha = -\xi_0$，即得 $y = \alpha x$.——譯者注

$x \neq 0$, $|x|\,|y| = -xy \Rightarrow y = \alpha x$, $\alpha \leqslant 0$。

例 6 当 $x \neq 0$, $y \neq 0$ 时, $\left|\frac{xy}{|x|\cdot|y|}\right| \leqslant 1$.

$\arccos \frac{xy}{|x|\cdot|y|} = \theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 叫做 x, y 之間的角。

当 x, y 之間的角 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 即 $xy=0$ 时, x, y 叫做**垂直或直交**, 写成 $x \perp y$. 当 $x=0$ 或 $y=0$ 时, 总是 $xy=0$. 这时也叫 x, y 垂直。

命题 46 $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

証明 $(x+y)^2 = x^2 + 2(xy) + y^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$. 取两边非負的平方根即得。

系 1❶ $|x-y| \geqslant |x| \sim |y|$. (~ 表示差)。

系 2 $|x-y| + |y-z| \geqslant |x-z|$.

注意 一般, 在由元 x, y, z, … 形成的集合 S 中, 假如对于任意两元 x, y, 有叫做 x, y 之間的**距离** $\rho(x, y)$ 的非負实数与之对应, 并且

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$
$$\rho(x, y) = \rho(y, x),$$
$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z).$$

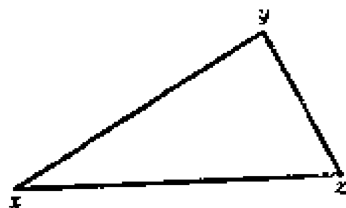


图 16.3

这时 S 叫做以 ρ 作为距离的**距离空間**。在一般 Euclid 空間 V 中, 假如 $|x-y| = \rho(x, y)$, 那末 V 成为距离空間。

假定在 V 中有元 x 及子空間 W, 如果 x 与 W 中任意元垂直, 那末 x 与 W 叫做**垂直或直交**, 写成 $x \perp W$. 对于 V 的两个子空間 W_1, W_2, 如果 W_1 中任意元 x_1 与 W_2 中任意元 x_2 恒垂直, 那末 W_1, W_2 叫做**垂直或直交**, 写成 $W_1 \perp W_2$.

例 7 $W_1 \perp W_2$

$$\Leftrightarrow W_1 \text{ 中任意元 } x_1 \text{ 垂直于 } W_2,$$
$$\Leftrightarrow W_2 \text{ 中任意元 } x_2 \text{ 垂直于 } W_1.$$

---

❶ 因为 $(x-y)^2 = x^2 - 2(xy) + y^2 \geqslant x^2 - 2|x|\cdot|y| + y^2 = (|x| - |y|)^2$, 所以 $|x-y| \geqslant |x| \sim |y|$. ——譯者注

例 8 假定 V 有子空間 W，那末 $W'=\{y;\ y\perp W\}$ 成为 V 中垂直于 W 的子空間。

例 8 中的子空間 W' 叫做 W 的**直交补空間**，用 $W^{\perp}$ 表示。

命題 47 假定 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 是 V 的 k 維子空間 W 的基底，那末 $y\in V$ 垂直于 W 的必要充分条件是 $x_i\perp y\ (i=1, 2, \cdots, k)$.

証明 $W\perp y \Rightarrow x_i\perp y\ (i=1, 2, \cdots, k)$ 是明显的。

反之，假如 $x_i\perp y\ (i=1, 2, \cdots, k)$. 因为 W 中任意元 x 能够表为 $x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k\ (\lambda_i\in \boldsymbol{R})$，所以 $xy=(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k)y=\lambda_1(x_1y)+\cdots+\lambda_k(x_ky)=0$. 于是 $x\perp y$. 因而 $W\perp y$.

对于 V 的 k 个子空間 $W_1, W_2, \cdots, W_k$，假如 $i\neq j$ 时 $W_i\perp W_j$，那末 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ 叫做**直交系**。又对于 V 中 k 个任意非零元 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，假如 $[a_1], [a_2], \cdots, [a_k]$ 是直交系，那末 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 叫做**直交系**。

命題 48 假定 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ 是直交系，那末它們无关。

証明 假設 $x_i\in W_i\ (i=1, 2, \cdots, k)$，如果 $x_1+x_2+\cdots+x_k=0$，那末 $0=x_i(x_1+x_2+\cdots+x_k)=x_i^2$，于是 $x_i=0\ (i=1,2,\cdots,k)$，所以 $W_1, W_2, \cdots, W_k$ 无关。

系 1 假定 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是直交系，那末它們綫性无关。

系 2 n 維 Euclid 空間 V 中 n 个元假如成为直交系，那末它們就是 V 的基底。

由单位向量形成的直交系叫做**正規直交系**。正規直交系成为 Euclid 空間的基底时，叫做**正規直交基底**或**完全正規直交系**。

定理 20 設 V 是 n 維 Euclid 空間，$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 V 的一个基底，如果

$$b_1=a_1,\quad e_1=\frac{b_1}{|b_1|},$$

$$b_k=a_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_ia_k)e_i,\quad e_k=\frac{b_k}{|b_k|}\quad (k=2, 3, \cdots, n),$$

那末 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的正規直交基底。

証明 显然 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 中都是单位向量。又当 $j<k$ 时，

$$e_jb_k=e_ja_k-\sum_{i=1}^{k-1}(e_ia_k)e_je_i=e_ja_k-e_ja_k=0, \text{ 所以 } e_je_k=0.$$

于是 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是正規直交系。因此成为正規直交基底。

注意 这样自 Euclid 空間 V 的任意基底作出正規直交基底的方法叫做 **E. Schmidt** 方法。

系 Euclid 空間有正規直交基底。

Euclid 空間中由正規直交基底确定的坐标叫做**直交坐标**。

定理 21 假定 W 是一般 Euclid 空間 V 的有限維子空間，那末

$$V=W\oplus W^{\perp}.$$

証明 因为 W 与 $W^{\perp}$ 无关，所以只要表明 $V=W+W^{\perp}$ 卽可。假定 $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 是 W 的正規直交基底，对于 $x\in V$，命

$$x'=\sum_{i=1}^{k}(e_ix)e_i, \qquad x''=x-x',$$

那末

$$x=x'+x'', \ x'\in W,$$

又由 $e_ix''=0(i=1,\cdots,k)$，所以 $x''\perp W$. 因此 $V=W+W^{\perp}$. (証毕)

由于上面的直和分解 $V=W\oplus W^{\perp}$，V 到 W 上的射影 P_W 叫做到 W 上的**正射影**。对于一般 Euclid 空間 V，今后如无預先声明，只写 P_W 就表示 W 是 V 的有限維子空間，P_W 是到 W 上的正射影。

当 $a\in V$, $a\neq 0$ 时，把 $P_{[a]}$ 单写成 P_a 叫做到 a 上的**正射影**。显然 $P_a(x)=(ax)a/|a|^2$[1].

[1] 命 $W=[a]$, $V=W+W^{\perp}$, $x=x'+x''$, $x'\in[a]$, $x''\in W^{\perp}$, 于是 $x=\lambda a+x''$. 因此 $ax=\lambda a^2$, $(ax)a=\lambda a^2\cdot a$, 所以 $\frac{(ax)a}{|a|^2}=\lambda a=x'=P_a(x)$.——譯者注

例 9　假定 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是任意直交系。对于 $x\in V$，如果 $P_{a_i}(x)=x_i$，那末 $|x|^2\geqslant\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2$ (**Bessel-Parseval 不等式**)。再当 V 是有限維时，$\{a_1,\cdots,a_k\}$ 是 V 的基底就等价于：对于 V 中任意元 x，$|x|^2=\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2$。

[解]　命 $\frac{a_i}{|a_i|}=e_i$，那末 $x_i=P_{e_i}(x)=(e_ix)e_i$，$|x_i|=e_ix$。

$$0\leqslant\left|x-\sum_{i=1}^{k}x_i\right|^2=\left(x-\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2=|x|^2-2\sum_{i=1}^{k}x_ix+\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2$$

$$=|x|^2-2\sum_{i=1}^{k}(e_ix)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}(e_ix)\ e_i\right)^2$$

$$=|x|^2-2\sum_{i=1}^{k}(e_ix)^2+\sum_{i=1}^{k}(e_ix)^2=|x|^2-\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2.$$

因此得 Bessel-Parseval 不等式。再

$$\text{对于任意 } x,\ |x|^2=\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2\Leftrightarrow\text{对于任意 } x,\ x=\sum_{i=1}^{k}x_i,$$

即任意 x 能够表示为 $a_1,\cdots,a_k$ 的綫性組合，因此 $\{a_1,\cdots,a_k\}$ 成为 V 的基底。

定理 22　凡 n 維 Euclid 空間都相互同构❶。

証明　由例 2，$\boldsymbol{R}^n$ 形成 n 維 Euclid 空間。因此只要証明任意 n 維 Euclid 空間 $V\cong\boldsymbol{R}^n$ 卽可。

取 V 的任意直交坐标系 $\varphi=\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，假如 $x, y\in V$，$x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$，$y=\sum_{i=1}^{n}\mu_ie_i$，那末

$$xy=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i=\varphi(x)\varphi(y).$$

所以 φ 是自 Euclid 空間 V 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的同构映射。因为这样的 φ 存在，所以 $V\cong\boldsymbol{R}^n$.　　　　(証畢)

由定理 22，任意 n 維 Euclid 空間能够看成为 $\boldsymbol{R}$ 上 n 維向量空間由适当坐标系 φ 用例 2 的方法所成的 Euclid 空間。

注意　假定 V 是 $\boldsymbol{R}$ 上任意向量空間，象在 §10 中所述的一样，对于 $x\in V$，$\xi\in\hat{V}$，定义 $(x, \xi)\in\boldsymbol{R}$，当 $\dim V=n$ 时，如果 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 是 V 的基

---

❶ 假如 R, R' 是两个 Euclid 空間，σ 是 R 到 R' 上的全单射，如果

$$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y),\ \sigma(\lambda x)=\lambda\sigma(x),\ xy=\sigma(x)\sigma(y),$$

那末，σ 叫做 R 到 R' 上的同构映射。这时 R, R' 叫做同构，表为 $R\cong R'$.——譯者注

底，$\{\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_n\}$ 是它在 $\hat{V}$ 中的对偶基底，由 $\sigma: V \to \hat{V}$，$\sigma(a_i) = \hat{a}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 就得到 $V \cong \hat{V}$。現在假定

$$x, y \in V, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i,$$

那末

$$(x, \sigma(y)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \mu_i \hat{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \quad (\because \ (a_i \hat{a}_j) = \delta_{ij}),$$

这就是在 V 給定坐标系 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ 时，Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ 中的內积 $\varphi(x)\varphi(y)$。因此如果在 V 中規定 $xy = (x, \sigma(y))$，那末 V 就成为 Euclid 空間。因为 n 維 Euclid 空間都同构，所以 Euclid 空間都可以看成是象上面那样形成的。

V 的綫性变换 p 如果把任意正規直交系映为正規直交系，那末 p 叫做**直交变換**，表示直交变换的矩陣叫做**直交矩陣**。V 的直交变换全体的集合記成 $\mathfrak{D}(V)$，V 是 n 維时，它略記为 $\mathfrak{D}_n$，n 級直交矩陣全体的集合記成 $\mathfrak{P}_n$。

例 10 $e_V \in \mathfrak{D}(V)$，$E_n \in \mathfrak{P}_n$。

定理 23 假定 V 是 Euclid 空間，下面各項都是 $p \in \mathfrak{L}(V)$ 为直交变换的必要充分条件。

（i）p 把 V 的一个正規直交基底映为正規直交基底。

（ii）假定 $x, y \in V$，那末 $p(x)p(y) = xy$。

（iii）假定 $x \in V$，那末 $|p(x)| = |x|$。

証明 假定 (0) 作为 $p \in \mathfrak{D}_n$，我們来証明 $(0) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (0)$，$(ii) \Leftrightarrow (iii)$。

$(0) \Rightarrow (i)$ 是明显的。

$(i) \Rightarrow (ii)$ 假定 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 及 $\{p(e_1), p(e_2), \cdots, p(e_n)\}$ 都是 V 的正規直交基底。如果 $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$，$y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$，那末

$$p(x)p(y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i p(e_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i p(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = xy.$$

$(ii) \Rightarrow (0)$ 是明显的。

(ii)⇒(iii)是明显的。

(iii)⇒(ii)　假定 x, y 是 V 中任意两元,那末 $|x+y|^2=|x|^2+2xy+|y|^2$, 所以 $xy=\frac{1}{2}(|x+y|^2-|x|^2-|y|^2)$. 现在假定 p 是满足(iii)的綫性变换,那末

$$p(x)p(y)=\frac{1}{2}(|p(x+y)|^2-|p(x)|^2-|p(y)|^2)$$

$$=\frac{1}{2}(|x+y|^2-|x|^2-|y|^2)=xy.$$

系　直交变换不变两元間的角。特別保存两元的直交性。

定理 24　下面各項都是 $P\in\mathfrak{M}(n, \boldsymbol{R})$ 为直交矩陣的必要充分条件。

(i) P 的 n 个列向量成为 $\boldsymbol{R}^n$ 的完全正規直交系。

(ii) P 的 n 个行向量成为 $\boldsymbol{R}^n$ 的完全正規直交系。

(iii) P 正則, $P^{-1}={}^tP$.

証明　假定(0)作为 $P\in\mathfrak{P}_n$.

因为 P 的 n 个列向量是 $\boldsymbol{R}^n$ 的自然基底关于 P 的象,所以(0)⇔(i)是明显的。

其次,当(i)成立时,如果命 $P=(a_1a_2\cdots a_n)$, 那末

$${}^tPP=\begin{pmatrix}{}^ta_1\\ {}^ta_2\\ \vdots\\ {}^ta_n\end{pmatrix}(a_1a_2\cdots a_n)=\begin{pmatrix}{}^ta_1a_1 & {}^ta_1a_2 & \cdots & {}^ta_1a_n\\ {}^ta_2a_1 & {}^ta_2a_2 & \cdots & {}^ta_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ {}^ta_na_1 & {}^ta_na_2 & \cdots & {}^ta_na_n\end{pmatrix}.$$

因为这里 ${}^ta_ia_j$ 就是 a_i 与 a_j 的內积,所以 ${}^ta_ia_j=\delta_{ij}$. 于是

$${}^tP\cdot P=E_n. \tag{A}$$

如果考虑(A)两边的行列式,那末 $|P|^2=1$, 所以 $|P|=\pm1\neq0$, 因此 P 正則,于是 P 的逆矩陣存在。由(A)得 $P^{-1}={}^tP$. 因此(iii)成立。反之,假如(iii)成立,于是(A)成立,因此 ${}^ta_ia_j=\delta_{ij}$ 成

立，所以(i)成立，因此(i)$\Leftrightarrow$(iii)。

由以上的証明可得到

$$\text{(ii)}\Leftrightarrow {}^tP\in \mathfrak{P}_n \Leftrightarrow ({}^tP)^{-1}={}^t({}^tP)\Leftrightarrow {}^t(P^{-1})=P\Leftrightarrow\text{(iii)}.$$

系 假如 $P\in\mathfrak{P}_n$，那末 $|P|=\pm1$。

例 11 假如 $P, P_1, P_2\in\mathfrak{P}_n$，那末 ${}^tP=P^{-1}\in\mathfrak{P}_n$，$P_1P_2\in\mathfrak{P}_n$。

［解］ 第一式是显然的。第二式由 $(P_1P_2)^t(P_1P_2)=P_1P_2{}^tP_2{}^tP_1=E_n$ 即得。

例 12 命 $\mathfrak{P}_n^+=\{P;\ P\in\mathfrak{P}_n,\ |P|=1\}$，$\mathfrak{P}_n^-=\{P;\ P\in\mathfrak{P}_n,\ |P|=-1\}$。如果 $P, P_1, P_2\in\mathfrak{P}_n^+$，那末 ${}^tP=P^{-1}\in\mathfrak{P}_n^+$，$P_1P_2\in\mathfrak{P}_n^+$。$\mathfrak{P}_n^+$ 中元叫做**特征直交矩陣**，$\mathfrak{P}_n^-$ 中元叫做**非特征直交矩陣**。

§17 实数体与复数体，酉空間

我們在§3～§13中，假定基础体 K 是任意体；在§14～§15，假定 K 含所考虑的綫性变换的特征值，在§16，假定 $K=\boldsymbol{R}$。实数体是在体之外还具有各种性质的体。在这里不叙述以它的性质为特征的公理（参照微积分学的教科书，例如彌永·亀谷·田村：微分积分学15～19頁）。在前节常常引用的 $\boldsymbol{R}$ 的性质有

（i） 假如 $x_i\in\boldsymbol{R}$，$i=1, \cdots, k$，那末 $\sum_{i=1}^{k}x_i^2\geqslant0$，

（ii） 假如 $\sum_{i=1}^{k}x_i^2=0$，$x_i\in\boldsymbol{R}$，那末 $x_1=\cdots=x_k=0$。

因为(i)对于 $k=1$ 也成立，所以 $x^2\geqslant0$。于是負数在 $\boldsymbol{R}$ 中沒有平方根。反之，

(iii) 假如 $a\in\boldsymbol{R}$，$a\geqslant0$，那末 $x^2=a$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中有两个根 $\pm\sqrt{a}$。这也是 $\boldsymbol{R}$ 的重要性质。

当 $a<0$ 时，为了使 $x^2=a$ 能解，于 $\boldsymbol{R}$"添加" $\sqrt{-1}$ 而做成复数体 $\boldsymbol{C}$。在§7，例13中也曾提及 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上二次代数。它的元 ξ 能够唯一地写成 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$（$\alpha, \beta\in\boldsymbol{R}$）的形状，$\boldsymbol{C}$ 中元

$$\xi=\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \bar{\xi}=\alpha-\beta\sqrt{-1} \tag{1}$$

叫做互为**共軛复数**。对于ξ，使$\bar{\xi}$与之对应的$\boldsymbol{C}$到它自身的变换，用σ表示：$\sigma(\xi)=\bar{\xi}$。显然，$\sigma\sigma=e_C$（恒等映射）。因此σ是全单射，并且$\sigma^{-1}=\sigma$。又$\sigma(\xi+\eta)=\sigma(\xi)+\sigma(\eta)$，$\sigma(\xi\eta)=\sigma(\xi)\sigma(\eta)$。所以$\sigma$是将$\boldsymbol{C}$映成自身作为体的同构映射(这事实叫做$\sigma$是$\boldsymbol{C}$的**自同构映射**)。但

$$\sigma(\xi)=\xi\Leftrightarrow\xi\in\boldsymbol{R},$$

因此$\boldsymbol{R}$与对于σ"不动元"的集合一致。

再由(1)，
$$\xi+\sigma(\xi)=\xi+\bar{\xi}=2\alpha,$$
$$\xi\cdot\sigma(\xi)=\xi\bar{\xi}=\alpha^2+\beta^2$$

都是$\boldsymbol{R}$中元，它們分别叫做ξ的**迹**(Spur)及**范数**(Norm)。由$\boldsymbol{R}$的性质(i)，$\xi\bar{\xi}\geqslant 0$，非負实数$\sqrt{\xi\bar{\xi}}$叫做ξ的**絕对值**，用$|\xi|$表示。

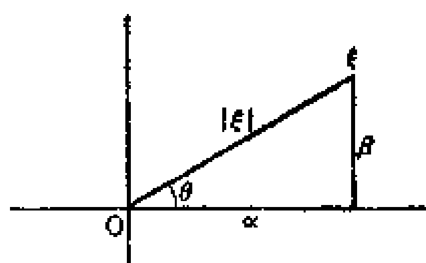


图 17.1

由$\boldsymbol{R}$的性质(ii)，

$$\xi=0\Leftrightarrow|\xi|=0.$$

当$|\xi|\neq 0$，$\xi=\alpha+\beta\sqrt{-1}$时，象

$$\cos\theta=\frac{\alpha}{|\xi|},\quad \sin\theta=\frac{\beta}{|\xi|}$$

这样的角θ存在，并且能够写成

$$\xi=|\xi|(\cos\theta+i\sin\theta).$$

它叫做ξ的**极式表示**，这些事实想都是周知的。

$\boldsymbol{C}$的再一个重要性质(在§14中也曾說过)是"以$\boldsymbol{C}$作系数的任意代数方程的根都在$\boldsymbol{C}$中"。这事实表达为"**$\boldsymbol{C}$是代数的閉体**"。

由于这最后的性质，所以在代数上$\boldsymbol{C}$比$\boldsymbol{R}$容易处理，通常，为了証明关于$\boldsymbol{R}$的命题，总是先把$\boldsymbol{R}$扩張到$\boldsymbol{C}$，然后把所得結果"縮小"到$\boldsymbol{R}$而达到目的。把Euclid空間扩張成为下面定义的酉空間就是这个目的。

$\boldsymbol{C}$上向量空間U，假如滿足下面条件$U1\sim U5$，那末U叫做**酉**(unitary)的，酉的$\boldsymbol{C}$上向量空間叫做**一般酉空間**。特别，有限

維的一般酉空間叫做**酉空間**。

$U1$. 对于 $x, y\in U$，有叫做 x, y 的内积而用 (x, y) 表示的 C 中元与它对应。

$U2$. $(x, y)=\overline{(y, x)}$.

$U3$. $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)$.

$U4$ 对于任意 $\xi\in C$，有 $(\xi x, y)=\xi(x, y)$.

$U5$. 由 $U2$，$(x, x)\in R$，但 $(x, x)\geqslant 0$，$(x, x)=0\Leftrightarrow x=0$.

例 1 固定 y，命 $f(x)=(x, y)$，那末 $f\in\mathfrak{L}(U, C)$，特别 $(0, y)=0$. 又固定 x，命 $g(y)=(x, y)$，那末 g 在下面的意义下成为自 U 到 C 的"反綫性映射"。

一般，假如 U_1，U_2 是 C 上向量空間，$f: U_1\to U_2$，如果条件：(a) $x, y\in U_1$ 时，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，(b) $\xi\in C$ 时，$f(\xi x)=\bar{\xi}f(x)$ 成立，那末 f 叫做自 U_1 到 U_2 的**反綫性映射** (anti-linear mapping)。这时，

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\bar{\xi}_i f(x_i).$$

自 U_1 到 U_2 的反綫性映射全体的集合用 $\bar{\mathfrak{L}}(U_1, U_2)$ 表示。$\bar{\mathfrak{L}}(U, U)$ 写成 $\bar{\mathfrak{L}}(U)$. 对于上面的 g，$g\in\bar{\mathfrak{L}}(U, C)$，特别 $x\cdot 0=0$.

例 2 U 是 C 上 n 維向量空間时，固定 U 的坐标系 φ，对于

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},\quad \varphi(y)=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},$$

命 $(x, y)={}^t\varphi(x)\cdot\overline{\varphi(y)}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_i$，那末 U 成为酉的。

特别 C^n 由 $(x, y)={}^tx\cdot\bar{y}$ 成为酉的。

例 3 当 $\alpha, \beta\in R$，$[\alpha, \beta]=\varDelta$ 时，对于 $\mathfrak{C}(\varDelta, C)$ 中元 $f, g, \cdots$，如果規定 $(f, g)=\int_\alpha^\beta f(x)\overline{g(x)}dx$，那末 $\mathfrak{C}(\varDelta, C)$ 成为酉的。

例 4 $|x|=\sqrt{(x, x)}\in R$，叫做 x 的长。

$$|\xi x|=|\xi|\cdot|x|,\quad |x|=0\Leftrightarrow x=0.$$

对于一般酉空間及酉空間能够与一般 Euclid 空間及 Euclid 空間平行地进行討論。証明与前节完全一样，所以把它省略。只把主要結果列举于下。以下如不預先声明，总假定 U 是一般酉

空間，x, y, … 是其中元。

命題 45′ $(x, y)^2 \leqslant |x|^2 \cdot |y|^2$.

命題 46′ $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

当 $(x, y)=0$ 时，x, y 叫做**垂直**或**直交**，写成 $x \perp y$. 关于 U 的子空間的直交与一般 Euclid 空間同样定义，也能得到同样結果。特别，正規直交系、正規直交基底、完全正規直交系都与一般 Euclid 空間、Euclid 空間同样定义。

定理 20′ 定理 20 中的 Euclid 空間 V 代以酉空間 U 时也成立。

系 酉空間具有正規直交基底。

定理 21′ 假定 W 是一般酉空間 U 的有限維子空間，那末

$$U = W \oplus W^{\perp}.$$

正射影 P_W, P_a 的定义也与一般 Euclid 空間一样。

例 5 在一般酉空間，Bessel-Parseval 不等式也成立。

定理 22′ n 維酉空間都是同构。

假如 U 的綫性变换 q 把任意正規直交系映为正規直交系，那末 q 叫做**酉变換**，表示酉变換的矩陣叫做**酉矩陣**。U 的酉变换全体的集合記成 $\mathfrak{U}(U)$，当 U 是 n 維时，它略記为 $\mathfrak{U}_n$. n 級酉矩陣全体的集合，記为 $\mathfrak{Q}_n$.

定理 23′ 当 U 是酉空間时，下面各項都是 $q \in \mathfrak{L}(U)$ 为酉变換的必要充分条件。

(i) q 把 U 的一个正規直交基底映为正規直交基底。

(ii) 假如 $x, y \in U$，那末 $(q(x), q(y)) = (x, y)$.

(iii) 假如 $x \in U$，那末 $|q(x)| = |x|$.

系 酉变换保存两元的直交性。

定理 24′ 下面各項都是 $Q \in \mathfrak{M}(n, C)$ 为酉矩陣的必要充分条件：

(i) Q 的 n 个列向量形成 C^n 的完全正規直交系。

(ii) Q 的 n 个行向量形成 C^n 的完全正規直交系。

(iii) Q 是正則，$Q^{-1}={}^t\overline{Q}$.

系 假如 $Q\in\mathfrak{D}_n$，那末 Q 的絕对值等于 1.

§18 正規变換

在 §13～§15 中我們曾考虑过下面这样的問題。

問題 A 当 V 是有限維向量空間，f 是 V 的綫性变換时，适当选擇 V 中坐标系 φ，使得对于 φ，表示 f 的矩陣 F 的形状尽可能簡单。

这問題在 §14 中引入的条件——基础体含 f 的特征值——下在 §15 中已經解决了，当 V 是 Euclid 空間或酉空間时，可以考虑特別取 φ 为正規直交坐标系来解答这問題。一般的解决是困难的，但当 V 是酉空間时，由适当的正規直交坐标表为对角綫型的变換則比較容易(后面的定理 25)。并且由它能够引出关于 Euclid 空間中变換的有用結論(定理 26, 27)。

我們的目的是在关于 Euclid 空間的定理 26, 27，酉空間与它的变換是作为手段而被引用的。因此，我們先从 Euclid 空間經"系数扩張"作出酉空間入手。

假定 V 是 n 維 Euclid 空間，固定它的一个正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，φ_0 是相应于这基底的坐标系，因为

$$V=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i;\ \alpha_i\in\boldsymbol{R}\right\},$$

如果命 $U=\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i;\ \xi_i\in\boldsymbol{C}\right\}$，那末 $U\supset V$，这时 U 可以看成 $\boldsymbol{C}$ 上 n 維向量空間。假如在 U 中 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 成为正規直交基底(参照前节例 2)，那末 U 是 n 維酉空間。这时，U 叫做自 V **經系数扩大**作成的酉空間，写成 $U=\widetilde{V}$. 又这时 V 中元叫做 U 的**实向量**。对

于 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in U$，叫 $\sum_{i=1}^{n}\bar{\xi}_i e_i\in U$ 做 x 的**共軛向量**，用 $\bar{x}$ 表示。假如对于 x，使 $\bar{x}$ 与之对应的映射是 σ，那末 $\sigma\sigma=e_U$。因此 σ 是全单射，是 U 到自身上的反綫性映射。U 中对于 σ 不动的元，即 $x=\sigma(x)=\bar{x}$ 的 x，就是实向量。

以上，由 n 維 Euclid 空間 V 的坐标系 φ_0，定义了 $\tilde{V}$ 同 σ。但由 V 的另外任意坐标系(可以不一定是正規直交) ψ，也能够作出完全同样的定义。为了区别它們，把由 ψ 定义的写成 $\tilde{V}_\psi$，σ_ψ。

命題 49 $\tilde{V}_\psi=\tilde{V}$，$\sigma_\psi=\sigma$。

証明 假定 $\{e_1',\cdots,e_n'\}$ 是 V 給出坐标系 ψ 的基底，如果

$$e_i'=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ki}e_k\quad(\lambda_{ki}\in\boldsymbol{R}),$$

那末

$$\tilde{V}_\psi\ni x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i'=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ki}e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\lambda_{ki}\right)e_k.$$

因为 $\xi_i\in\boldsymbol{C}$，$\lambda_{ki}\in\boldsymbol{R}$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\lambda_{ki}\in\boldsymbol{C}$，于是 $x\in\tilde{V}$。因此 $\tilde{V}_\psi\subset\tilde{V}$。同样 $\tilde{V}_\psi\supset\tilde{V}$。所以 $\tilde{V}_\psi=\tilde{V}$。

又对于上面的 x，

$$\sigma_\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}\bar{\xi}_i e_i'=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{\xi}_i\lambda_{ki}\right)e_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\lambda_{ki}}\right)e_k=\sigma(x).$$

因为，这对于任意 $x\in V$ 都成立，所以 $\sigma_\psi=\sigma$。 (証毕)

由这命題，得知沒有必要在 $\tilde{V}_\psi$，σ_ψ 中明示这样的 ψ，因而可以简单記为 $\tilde{V}$，σ。

以下，在本节，固定 V，因而固定 $\tilde{V}=U$ 来討論。

命題 50 假定 U 的子空間 W 对于 σ 不动，即假定 $\sigma(W)=W$，那就有 V 的某子空間 W_0 存在，使得 $W=\tilde{W}_0$。又它的逆也成立。

象这样的 U 的子空間，叫做**实子空間**。

証明 假定 $\{a_1, \cdots, a_k\}$ 是 W 的基底,容易得知

$$W=[a_1, \cdots, a_k]=[\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_k]$$
$$=\left[a_1+\bar{a}_1, \cdots, a_k+\bar{a}_k, \frac{a_1-\bar{a}_1}{\sqrt{-1}}, \cdots, \frac{a_k-\bar{a}_k}{\sqrt{-1}}\right].$$

右边的 $2k$ 个向量显然都是实向量。命它們为 $c_1, \cdots, c_{2k}$, 那末,取

$$W_0=\left\{\sum_{j=1}^{2k}\lambda_j c_j;\ \lambda_j\in \boldsymbol{R}\right\}$$

即可。这是因为,假如 $\{e_1', \cdots, e_k'\}$ 是 W_0 的正規直交基底, 那末 $c_j=\sum_{i=1}^{k}\mu_{ij}e_i'$, $\mu_i\in \boldsymbol{R}$. 所以

$$W\ni x=\sum_{j=1}^{2k}\xi_j c_j=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{2k}\mu_{ij}\xi_j\right)e_i'.$$

反之,假定 W_0 是 V 的子空間,那末显然 $\widetilde{W}_0$ 对于 σ 不动。(証毕)

对于 U 的綫性变换 $f\in\mathfrak{L}(U)$, $\bar{f}=\sigma f\sigma$ 叫做 f 的**共軛变换。** 显然, $\bar{f}\in\mathfrak{L}(U)$ 并且 $\bar{\bar{f}}=f$. 特别,当 $f=\bar{f}$ 时, f 叫做**实变换**。

命題 51 假定 f 是关于 φ_0 用矩陣 $F=(\xi_{ij})\in\mathfrak{M}(n, \boldsymbol{C})$ 表示, 那末 $\bar{f}$ 是关于 φ_0 用矩陣 $\bar{F}=(\bar{\xi}_{ij})\in\mathfrak{M}(n, \boldsymbol{C})$ 表示。

証明 $f(e_j)=\sum\xi_{ij}e_i$, 所以 $\bar{f}(e_j)=\sigma(\sum\xi_{ij}\bar{e}_i)=\sum\bar{\xi}_{ij}e_i$. (証毕)

矩陣 $\bar{F}=(\bar{\xi}_{ij})$ 叫做 $F=(\xi_{ij})$ 的**共軛矩陣**。特别, $F=\bar{F}$ 时, F 叫做**实矩陣**。显然, 表示实变换的矩陣是实矩陣。实矩陣是 $\mathfrak{M}(n, \boldsymbol{R})$ 中元。

$f\in\mathfrak{L}(U)$ 用实矩陣 F 表示时, 表示 $f|V$ 的矩陣显然是同样。特别, f 是实变换与 $f|V\in\mathfrak{L}(V)$ 等价。

命題 52 实变换把任意实子空間映为实子空間。

証明 假定 f 是实变换, W 是 U 的实子空間。对于 $f(W)$ 中任意元 y, 如果 $y=f(x)$, $x\in W$. 因为 $f=\bar{f}$, $\bar{x}\in W$, 那末 $\bar{y}=\sigma f(x)=\sigma f\sigma(\bar{x})=\bar{f}(\bar{x})=f(\bar{x})\in f(W)$. 所以 $f(W)$ 是实子空間。

命題 53 假定 f 是实变换,那末 $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ 都是实子空間。

証明　假定 $x\in \mathrm{Ker}\, f$，那末 $f(\bar{x})=\sigma\bar{f}(x)=\sigma f(x)=\bar{0}=0$。所以 $\bar{x}\in \mathrm{Ker}\, f$，因此 $\mathrm{Ker}\, f$ 是实子空間。

又因为 U 自身显然是 U 的实子空間，由命題 52，$\mathrm{Im}\, f=f(U)$ 是 U 的实子空間。　　(証毕)

象在 §10 一样，对于 $f\in \mathfrak{L}(U)$，$F\in \mathfrak{M}(n, \boldsymbol{C})$，命 ${}^tf$，${}^tF$ 分别表示 f，F 的轉置变换及轉置矩陣，${}^t\bar{f}={}^t(\bar{f})$ 用 f^* 表示，${}^t\bar{F}={}^t(\bar{F})$ 用 F^* 表示，分别叫做 f，F 的**伴随变换**及**伴随矩陣**。假如 f 关于 φ_0（今后"关于 φ_0"这語有时省略）用矩陣 F 表示，那末表示 f^* 的矩陣显然是 F^*。

例 1　$(f^*)^*=f$，$(f+g)^*=f^*+g^*$；
假如 $\xi\in \boldsymbol{C}$，那末 $(\xi f)^*=\bar{\xi}f^*$，$(f\circ g)^*=g^*\circ f^*$。
f 是实变换与 $f^*={}^tf$ 等价。
[解]　假如就表示 f，g 的矩陣来考虑，那末它們都是显然的。

命題 54　对于 $x, y\in U$，$(f(x), y)=(x, f^*(y))$。

証明　假定 F 是表示 f 的矩陣，那末 $(f(x), y)=(F\cdot\varphi_0(x), \varphi_0(y))$❶，$(x, f^*(y))=(\varphi_0(x), F^*\cdot\varphi_0(y))$。因此，只要証明 $(F\cdot\varphi_0(x), \varphi_0(y))=(\varphi_0(x), F^*\cdot\varphi_0(y))$ 即可。但

$$\begin{aligned}(F\cdot\varphi_0(x), \varphi_0(y))&={}^t(F\cdot\varphi_0(x))\cdot\overline{\varphi_0(y)}={}^t\varphi_0(x)\cdot{}^tF\cdot\overline{\varphi_0(y)}\\&={}^t\varphi_0(x)\cdot(\overline{{}^t\bar{F}\cdot\varphi_0(y)})={}^t\varphi_0(x)\cdot(\overline{F^*\cdot\varphi_0(y)})\\&=(\varphi_0(x), F^*\cdot\varphi_0(y)).\end{aligned}$$
　　(証毕)

定理 25　对于 n 維酉空間 U 的变换 f，下面两个条件 (i)，(ii) 是等价的。

(i)　f 与它的伴随变换 f^* 可换：$f\circ f^*=f^*\circ f$。

(ii)　假如取 U 的适当正規直交坐标 φ，那末 f 关于 φ 能够用对角綫型矩陣 D 表示。

---

❶　因为 φ_0 是自 U 到 $\boldsymbol{C}^n$ 的同构映射，$x\to\varphi_0(x)$，所以 $f(x)\to F\varphi_0(x)$，因此 $(f(x), y)=(F\varphi_0(x), \varphi_0(y))$。——譯者注

証明 (ii)$\Rightarrow$(i) 假定关于 φ_0，表示 f 的矩陣是 F，自 φ_0 到 φ 的坐标变换的矩陣是 P，那末由 (ii)，$PFP^{-1}=D$, $F=P^{-1}DP$。因为 φ 是正規直交坐标，所以 P 是酉矩陣，因此 $P^{-1}={}^t\overline{P}=P^*$。于是 $F^*=(P^*DP)^*=P^*D^*(P^*)^*=P^*D^*P$, $FF^*=P^*DP\cdot P^*D^*P$ $=P^*DD^*P$, $F^*F=P^*D^*DP$。但是 D, $D^*=\overline{D}$ 是对角綫型的，所以 $DD^*=D^*D$, 因此 $FF^*=F^*F$, $f\circ f^*=f^*\circ f$.

(i)$\Rightarrow$(ii) 为了証明这一点，把满足 (i) 的 $\mathfrak{L}(U)$ 中元的集合写成 $\mathfrak{N}(U)$，或簡記为 $\mathfrak{N}$. 首先証明下面关于 $\mathfrak{N}$ 的引理 3~5。

引理 3 設 $f\in\mathfrak{N}$, $\xi\in\boldsymbol{C}$, 則 $f-\xi\in\mathfrak{N}$.

証明
$$\begin{aligned}(f-\xi)(f-\xi)^*&=(f-\xi)(f^*-\overline{\xi})=ff^*-\overline{\xi}f-\xi f^*+\xi\overline{\xi}\\&=f^*f-\overline{\xi}f-\xi f^*+\xi\overline{\xi}=(f^*-\overline{\xi})(f-\xi)\\&=(f-\xi)^*(f-\xi).\end{aligned}$$

引理 4 設 $f\in\mathfrak{N}$, 則 $\operatorname{Ker}f=\operatorname{Ker}f^*$.

証明 設 $f\in\mathfrak{N}$, 則 $(f(x), f(y))=(f^*(x), f^*(y))$ [1]。特别，$(f(x), f(x))=(f^*(x), f^*(x))$。于是 $|f(x)|=|f^*(x)|$。因此 $f(x)=0\Leftrightarrow f^*(x)=0$。所以 $\operatorname{Ker}f=\operatorname{Ker}f^*$.

引理 5 設 $f\in\mathfrak{N}$, $f(x)=\xi x$, 則 $f^*(x)=\overline{\xi}x$.

証明 由引理 3, $f-\xi\in\mathfrak{N}$. 因此，假如 $(f-\xi)(x)=0$, 那末由引理 4, $(f-\xi)^*(x)=0$。即 $f^*(x)-\overline{\xi}x=0$.

(i)$\Rightarrow$(ii) 的証明 假定 $f\in\mathfrak{N}$, f 的特征多項式是 $\Phi_f(X)=(X-\xi_1)^{r_1}\cdots(X-\xi_k)^{r_k}$ (因为基础体 $\boldsymbol{C}$ 是代数閉体，所以特征值 $\xi_i\in\boldsymbol{C}$)。为了証明 (ii)，只要証明下列两条即可：

(a) 对于各特征值 ξ_i 簡約次数 ν_i 都是 1, 即 $\operatorname{Ker}(f-\xi_i)=\operatorname{Ker}(f-\xi_i)^2$ $(i=1, 2, \cdots, k)$.

(b) 假如 $\xi_i\neq\xi_j$, 那末 $\operatorname{Ker}(f-\xi_i)\perp\operatorname{Ker}(f-\xi_j)$.

---

[1] 因为 $(f(x), f(y))=(x, f^*f(y))=(x, ff^*(y))=(f^*(x), f^*(y))$. ——譯者注

实际上，假如 (a)，(b) 能够成立，那末由 (a)，$\mathrm{Ker}\,(f-\xi_i)=\mathrm{Ker}\,(f-\xi_i)^{n}$，如果命它为 W_i，那末 $U=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$，但由 (b)，$W_i\perp W_j\ (i\neq j)$，所以，如果自各个 W_i 取正規直交基底，那末把它們合并起来就得到 U 的正規直交基底。

(a) 的証明。命 $f-\xi_i=g$，由引理 3，$g\in\mathfrak{N}$。因此，只要示明当 $g\in\mathfrak{N}$ 时，$\mathrm{Ker}\,g=\mathrm{Ker}\,g^2$，即 $g^2(x)=g(g(x))=0\Rightarrow g(x)=0$ 即可。命 $g(x)=y$，則 $g(y)=0$。由引理 4，$g^*(y)=0$，即 $g^*g(x)=0$。于是

$$(g^*g(x),\ x)=(g(x),\ g(x))=0.$$

所以 $g(x)=0$。这就証明了 (a)。

(b) 的証明。假定 $x\in\mathrm{Ker}\,(f-\xi_i)$，$y\in\mathrm{Ker}\,(f-\xi_j)$，只示明 $(x,\ y)=0$ 即可。由 x, y 的定义，$f(x)=\xi_i x$，$f(y)=\xi_j y$。于是 $(f(x),\ y)=(\xi_i x,\ y)=\xi_i(x,\ y)$。又

$(f(x),\ y)=(x,\ f^*(y))=(x,\ \bar{\xi}_j y)=\xi_j(x,\ y)$（由引理 5）。所以 $\xi_i(x,\ y)=\xi_j(x,\ y)$。但 $\xi_i\neq\xi_j$，所以 $(x,\ y)=0$。这就証明了 (b)。

由以上，定理 25 就完全証明了。（証毕）

满足定理 25 中条件 (i) 或 (ii) 的 U 的变换，叫做**正規变换**。表示它的矩陣叫做**正規矩陣**。$F\in\mathfrak{M}(n,\ \boldsymbol{C})$ 为正規矩陣的必要充分条件由 (i) 是

$$FF^*=F^*F.$$

系 假定 f 是正規变换，$\xi_1, \cdots, \xi_k$ 是它的特征值，如果取适当的正射影 $p_1, \cdots, p_k$，那末

$$f=\xi_1 p_1+\cdots+\xi_k p_k,\quad e_U=p_1+\cdots+p_k.$$

証明 这时 p_i 取 $W_i=\mathrm{Ker}\,(f-\xi_i)$ 上的正射影即可。（証毕）

特别，$f=f^*$ 的 $f\in\mathfrak{L}(U)$ 是正規变换，表示它的矩陣是正規矩陣。象这样的变换，叫做 **Hermite 变换**，表示它的矩陣即满足

$F=F^*$ 的矩陣叫做 **Hermite 矩陣**。Hermite 变换全体的集合用 $\mathfrak{H}$ 表示。

又酉变换因为满足 $f^{-1}=f^*$，所以是正規变换。酉矩陣是正規矩陣。

命題 55 Hermite 变换的特征值是实数。酉变换的特征值的絕对值是 1.

証明 假定 f 是 Hermite 变换，那末 $(f(x), y)=(x, f(y))$。特别，$(f(x), x)=(x, f(x))$，如果 $\xi\in\mathfrak{C}_f$，那就有 $f(x)=\xi x$，$x\neq 0$ 的 $x\in U$ 存在。对于这 x，$(\xi x, x)=(x, \bar{\xi}x)$，$\xi(x,x)=\bar{\xi}(x,x)$，因此 $\xi=\bar{\xi}$ 即 $\xi\in\boldsymbol{R}$.

又假如 f 是酉变换，那末 $(f(x), x)=(x, f^{-1}(x))$。如果 $\xi\in\mathfrak{C}_f$，那末 $f(x)=\xi x$，$x\neq 0$. 所以 $x=f^{-1}(\xi x)=\xi f^{-1}(x)$. 因此 $\xi^{-1}x=f^{-1}(x)$，于是 $(\xi x, x)=(x, \xi^{-1}x)$，$\xi(x, x)=\bar{\xi}^{-1}(x, x)$. 所以 $\xi\bar{\xi}=1$，即 $|\xi|=1$.　（証毕）

$F={}^tF$ 的矩陣叫做**对称矩陣**，用对称矩陣表示的变换叫做**对称变换**。

命題 56 实矩陣是 Hermite 矩陣与它是对称矩陣等价（因此实变换是 Hermite 变换与它是对称变换等价）。又实矩陣是酉矩陣与它是直交矩陣等价（因此实变换是酉变换与它是直交变换等价）。

証明 由定义自明。

定理 26 实对称矩陣 F，假如用适当的直交矩陣 P 变换，那就成为下面的对角綫型矩陣

$$PFP^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}.$$

这里 α_i $(i=1, \cdots, n)$ 是 f 的特征值，它們都是实数。

証明 因为 F 是 Hermite 矩陣，由适当的酉矩陣 P 变换能够成为

$$PFP^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}, \tag{18.1}$$

这由定理25明白。这里 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 F 的特征值，所以它們都是实数，这在命题55已明示。

因为 F 是实矩陣，α_i 是实数，所以容易理解 $F-\alpha_i$ 是实变换。于是 $W_i=\mathrm{Ker}\,(F-\alpha_i)$ 是实子空間。由命題50，$W_i=\widetilde{W}_{i0}$，$W_{i0}\subset V$。

因此，可以取 W_{i0} 的正規直交基底作为 W_i 的正規直交基底。假如把它們合并起来做成的 U 的正規直交基底作为 φ，因为它們只是由实向量构成的，所以，如果把自 φ_0 到 φ 上的坐标变换的矩陣作为 P，那末 P 是实矩陣并且滿足 (18.1)。因此 P 是滿足 (18.1) 的直交矩陣。

例2 試用适当的直交矩陣 P 变换实对称矩陣 $F=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 成为对角綫型。

［解］ $\Phi_F(X)=X^3-X^2-11X+11=(X-1)(X^2-11)$．因此特征值是 $1, \sqrt{11}, -\sqrt{11}$．于是由适当的直交矩陣 P 应該得到

$$PFP^{-1}=PF^tP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{11} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{11}\end{pmatrix}. \tag{A}$$

因为

$$\mathrm{Ker}\,(F-E)=\lambda\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\ 0\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix},\quad \mathrm{Ker}\,(F\mp\sqrt{11}E)=\lambda\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{22\mp2\sqrt{11}}}\\ \frac{\pm\sqrt{11}-1}{\sqrt{22\mp2\sqrt{11}}}\\ -\frac{1}{\sqrt{22\mp2\sqrt{11}}}\end{pmatrix},$$

所以

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}} & \frac{3}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}} & -\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}} & -\frac{1}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}} \end{pmatrix},$$

$$P={}^tP^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}} & \frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}} & -\frac{1}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}} \\ \frac{3}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}} & -\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}} & -\frac{1}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}} \end{pmatrix}.$$

如果,試用这 P 实际計算就能够証实(A).

例 3 假定 f 是任意 Hermite 变换,因为 $i,\ -i\notin\mathfrak{C}_f$,所以$(f+i)^{-1}$,$(f-i)^{-1}\in\mathfrak{L}(U)$. 今命

$$q=(f+i)(f-i)^{-1},$$

那末

$$q=(f-i)^{-1}(f+i)$$

$((f-i)q=(f-i)(f+i)(f-i)^{-1}=(f^2+1)(f-i)^{-1}=(f+i)(f-i)(f-i)^{-1}=f+i)$,因此,把它又写成

$$q=\frac{f+i}{f-i}. \tag{1}$$

这里$(f-i)q=f+i$. 如果考虑两边的伴随变换,注意 $f^*=f$,那末 $q^*(f+i)=f-i$,所以 $q^*=(f-i)(f+i)^{-1}=q^{-1}$. 于是用(1)定义的 q 是酉变换。并且,如果 $q(x)=x$,那末$(f-i)x=(f+i)x$. 因此 $x=0$,所以 $1\notin\mathfrak{C}_q$.

反之,假如 $q\in\mathfrak{U}$,$\mathfrak{C}_q\not\ni 1$,由

$$f=i\,\frac{q+1}{q-1} \tag{2}$$

定义的 $f\in\mathfrak{L}(U)$,因为 $f^*=f$,所以 $f\in\mathfrak{H}$.

因为(2)是由(1)解 f 得到的,所以(1)的关系給出 $\mathfrak{H}$ 与 $\mathfrak{U}'=\{q;\,q\in\mathfrak{U},\ \mathfrak{C}_q\not\ni 1\}$ 之間一对一的对应。但 Hermite 矩陣能够立刻写出,所以特征値不是 1 的酉矩陣都能够由变换(1)得到。(1),(2)叫做 **Cayley 变换**。

命題 57 假定 p 是 n 維 Euclid 空間的(实)直交变换,那末它

的特征多项式 $\Phi_p(X)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 中能够因子分解为下面形状:

$$\Phi_p(X)=(X-1)^{\rho_0}(X+1)^{\rho_1}(X-\varepsilon(\theta_1))^{\nu_1}(X-\varepsilon(-\theta_1))^{\nu_1}\cdots (X-\varepsilon(\theta_l))^{\nu_l}(X-\varepsilon(-\theta_l))^{\nu_l}, \tag{18.2}$$

这里, $\rho_0\geqslant 0$, $\rho_1\geqslant 0$, $\nu_i\geqslant 0$, $n=\rho_0+\rho_1+2(\nu_1+\cdots+\nu_l)$,

$$\varepsilon(\theta)=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta.$$

証明 因为 p 的特征值的絕对值是 1,所以 $\Phi_p(X)$ 的根是 1, -1 或形状如 $\varepsilon(\theta)$ 的复数。于是要証明命题 57, 只要証明: 假如 $\Phi_p(X)$ 有非实数根 ξ, 那末 $\bar{\xi}$ 也是 $\Phi_p(X)$ 的同重度的根即可。

因为 p 是实变换,所以 $\Phi_p(X)$ 的系数都是实数,即

$$\Phi_p(X)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i X^i,\quad \alpha_i\in\boldsymbol{R}.$$

今假定 $\Phi_p(\xi)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\xi^i=0$,考虑两边的共軛复数就得到 $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\bar{\xi}^i=0$, 所以 $\bar{\xi}$ 也是 $\Phi_p(X)$ 的根。因此 $\Phi_p(X)$ 能够用 $(X-\xi)(X-\bar{\xi})=X^2-(\xi+\bar{\xi})X+\xi\bar{\xi}$ $(\xi+\bar{\xi}\in\boldsymbol{R},\ \xi\bar{\xi}\in\boldsymbol{R})$除尽,它的商 $\psi(X)$ 又以 ξ 与 $\bar{\xi}$ 同时作为根或同时不作为根,重复这样做下去就得知 $\Phi_p(X)$ 的根 ξ, $\bar{\xi}$ 的重度相等。

定理 27 假定 P 是直交矩陣,它的特征多項式能够象(18.2)那样因子分解,如果用适当的直交矩陣 Q 变换 P,那就成为下面的形状:

$$QPQ^{-1}=E_{\rho_0}\oplus(-E_{\rho_1})\oplus\underbrace{P(\theta_1)\oplus\cdots\oplus P(\theta_1)}_{\nu_1\text{个}}\oplus\cdots\oplus\underbrace{P(\theta_l)\oplus\cdots\oplus P(\theta_l)}_{\nu_l\text{个}},$$

这里 $P(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $\rho_0=0$ 或 $\rho_1=0$ 时,就分别沒有 E_{ρ_0} 或 $(-E_{\rho_1})$ 的項。

証明 由命題 57 及定理 25, 假定

$$W^{(0)}=\mathrm{Ker}(p-1),\qquad W^{(1)}=\mathrm{Ker}(p+1),$$
$$W_i=\mathrm{Ker}(p-\varepsilon(\theta_i)),\quad W_i'=\mathrm{Ker}(p-\varepsilon(-\theta_i)),$$

那就能够直和分解

$$U=W^{(0)}\oplus W^{(1)}\oplus W_1\oplus W_1'\oplus\cdots\oplus W_l\oplus W_l'$$

为直交系。于是假定 W_i 的正規直交基底是 $\{b_1^{(i)},\cdots,b_{\nu_i}^{(i)}\}$，那末 W_i' 的正規直交基底能够选取 $\{\bar{b}_1^{(i)},\cdots,\bar{b}_{\nu_i}^{(i)}\}$ [1]．今任意选取 $W^{(0)}\oplus W^{(1)}$ 的正規直交基底 $\{a_1,\cdots,a_{\rho_0+\rho_1}\}$，如果新的基底取 $\{a_1,\cdots,a_{\rho_0+\rho_1},b_1^{(1)},\bar{b}_1^{(1)},\cdots,b_k^{(i)},\bar{b}_k^{(i)},\cdots,b_{\nu_l}^{(l)},\bar{b}_{\nu_l}^{(l)}\}$ 的順序，用 P 表示的直交变換是 p 时，

$$p(b_k^{(i)})=\varepsilon(\theta_i)\cdot b_k^{(i)},\quad p(\bar{b}_k^{(i)})=\varepsilon(-\theta_i)\cdot\bar{b}_k^{(i)}.$$

以下把 $b_k^{(i)}$, $\bar{b}_k^{(i)}$, θ_i 分别略記为 b, $\bar{b}$, θ 来討論。

命
$$c=\frac{b+\bar{b}}{\sqrt{2}},\quad d=\frac{b-\bar{b}}{\sqrt{-2}},$$

显然 $[b,\bar{b}]=[c,d]$，并且 c, d 是实向量。又由于 $(b,\bar{b})=0$，所以 $|c|=1$, $|d|=1$, $(c,d)=0$．再由計算，容易得知

$$p(c)=\cos\theta\cdot c-\sin\theta\cdot d,\quad p(d)=\sin\theta\cdot c+\cos\theta\cdot d. \tag{18.3}$$

假如，把对于各个 $b_k^{(i)}$ 的 c, d 写成 $c_k^{(i)}$, $d_k^{(i)}$，那末

$$\{a_1,\cdots,a_{\rho_0+\rho_1},c_1^{(1)},d_1^{(1)},\cdots,c_k^{(i)},d_k^{(i)},\cdots,c_{\nu_l}^{(l)},d_{\nu_l}^{(l)}\} \tag{18.4}$$

就是由实向量构成的 U 的正規直交基底，假定到这基底的坐标变換的矩陣是 Q，由(18.3)得

$$QPQ^{-1}=E_{\rho_0}\oplus(-E_{\rho_1})\oplus\underbrace{P(\theta_1)\oplus\cdots\oplus P(\theta_1)}_{\nu_1\text{个}}\oplus\cdots\oplus\underbrace{P(\theta_l)\oplus\cdots\oplus P(\theta_l)}_{\nu_l\text{个}}.$$

因为 Q 是酉的并且实的，所以它是直交矩陣。

例 4 由定理 27 的变換，三級直交矩陣能够变为下面中的一种形状（特

---

[1] 因为 $f(b_j^{(i)})=\varepsilon(\theta_i)b_j^{(i)}$，于是 $f(\bar{b}_j^{(i)})=f\sigma(b_j^{(i)})=\sigma\bar{f}(b_j^{(i)})=\sigma f(b_j^{(i)})=\sigma(\varepsilon(\theta_i)b_j^{(i)})=\varepsilon(-\theta_i)\bar{b}_j^{(i)}$，所以 $\bar{b}_j^{(i)}\in W_i'$．因为 $b_1^{(i)},\cdots,b_{\nu_i}^{(i)}$ 是正規直交系，显然 $\bar{b}_1^{(i)},\cdots,\bar{b}_{\nu_i}^{(i)}$ 也是正規直交系。再由定理 25 的証明中所示 $\varepsilon(\theta_i)$ 的簡約次数都是 1，所以 $\mathrm{Ker}(f-\varepsilon(-\theta_i))^{\nu_i}=\mathrm{Ker}(f-\varepsilon(-\theta_i))$．由 §14 定理 16，$\mathrm{Ker}(f-\varepsilon(-\theta_i))^{\nu_i}$ 的維数是 ν_i，因此 W_i' 的維数也是 ν_i．所以 $\bar{b}_1^{(i)},\cdots,\bar{b}_{\nu_i}^{(i)}$ 形成 W_i' 的基底。——譯者注

征直交矩陣变換为 $P^+(\theta)$ 的形状，非特征直交矩陣变換为 $P^-(\theta)$ 的形状)：

$$P^+(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad P^-(\theta)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

［解］ 特征値中有虚数时，假定它的幅角是 θ 即可。特征値都是实数时，它們是 1 或 -1. 例如特征値是 1, -1, -1 时，假定 $\theta=\pi$, 取 $\cos\theta=-1$ 即可。

例 5 $F^*=-F$ 的矩陣 F 叫做**反称-Hermite 矩陣**。因为，反称-Hermite 矩陣也是正規矩陣的一种，所以它能够用酉矩陣变为对角綫型。它的特征値都是純虚数。

实的反称-Hermite 矩陣 F 满足关系 ${}^tF=-F$ 的，叫做**交代矩陣**或**歪对称矩陣**。假定它的特征値是 $\underbrace{0,\cdots,0}_{\leftarrow i\text{ 个}\rightarrow}$, $\pm\sqrt{-1}\alpha_1,\cdots,\pm\sqrt{-1}\alpha_k$, 那末它能够用适当的直交矩陣能够变为 $O_{ii}\oplus\begin{pmatrix}0 & \alpha_1\\ -\alpha_1 & 0\end{pmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{pmatrix}0 & \alpha_k\\ -\alpha_k & 0\end{pmatrix}$的形状。

§19 二次形式，Hermite 形式

所謂**形式**就是齐次多項式的别名，例如

$$X+Y+Z,\ X^2-XY+Y^2$$

分别是变数 X, Y, Z 的一次形式及 X, Y 的二次形式。体 K 上变数 $X_1, \cdots, X_n$ 的二次形式一般形状是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}X_iX_j,\quad \alpha_{ij}\in K \tag{19.1}$$

$\left(\text{上面二重和的記号 }\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\text{ 也可簡写成 }\sum_{i,j=1}^{n}\right)$. α_{ij} 与 α_{ji} 当然沒有必要是一样，但因为

$$\alpha_{ij}X_iX_j+\alpha_{ji}X_jX_i=(\alpha_{ij}+\alpha_{ji})X_iX_j,$$

所以如果把 $(\alpha_{ij}+\alpha_{ji})/2$ 改为 α_{ij}, 即令

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}, \tag{19.2}$$

(19.1)的实质意义也不变。因此总是假定(19.2)成立。于是 K 上 n 級方陣

$$A = (a_{ij}) \tag{19.3}$$

是对称矩陣，即 ${}^tA = A$。假如"变数向量"

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \tag{19.4}$$

簡单的用 X 表示，那末(19.1)能够用矩陣的积

$${}^tXAX \tag{19.1'}$$

表示。如果把 K 中元代变数 X_i，那末(19.1)或(19.1')的值就是 K 中元，所以(19.1')可以看成是表示自 K^n 到 K 的映射。

例 1 体 K 上 n 个变数 $X_1, \cdots, X_n$ 的一次形式的一般形状是

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \quad a_i \in K.$$

假如对于这 $X_1, \cdots, X_n$ 把 K 中元代入，那末所得到的值就是 K 中元，所以它能够看成为自 K^n 到 K 的映射。因为它显然是綫性映射，所以一次形式可以看成是 K^n 的对偶空間中元。

在几何学，物理学中最常用的是 $K = \boldsymbol{R}$ 的情况。我們今后以"实二次形式"为主来考虑。这时 A 是实对称矩陣。

在上面，为了討論 Euclid 空間引用酉空間；討論实对称矩陣时，以考虑复数矩陣作为手段。与这同样，討論实二次形式时，来考虑它的扩張 Hermite 形式。假定 H 是 Hermite 矩陣，即 $H = H^* = {}^t\overline{H}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的矩陣，代替(19.1')，命

$$X^*HX = {}^t\overline{X}HX = (HX, X), \tag{19.1''}$$

叫它做 **Hermite 形式**。这时，因为"变数向量" X 是把 U 中任意元的坐标代入的"值"，所以 $\overline{X}$ 是有意义的。

因为对于 X 把 U 中任意元的坐标代入时，

$$\overline{(HX, X)} = (X, HX) = (H^*X, X) = (HX, X),$$

所以 (HX, X) 的值是实数。因此 (HX, X) 能够看成是自 $\boldsymbol{C}^n$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射。

仿此，(19.1')也能够写成

$$^tXAX=(AX, X).$$

在下面，假定 A 是表示 n 級实对称矩陣，H 表示 n 級 Hermite 矩陣，(AX, X) 表示二次形式，(HX, X) 表示 Hermite 形式，对于二次形式，X 表示 n 維 Euclid 空間 V 中元，对于 Hermite 形式，X 表示 n 維西空間 U 中元。与前节同样，假定 $U=\tilde{V}$，固定 V 的(因而 U 的)一个正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ (及关于它的坐标系 φ_0)。当 $x\in V$ (或 $x\in U$) 时，如果

$$\varphi_0(x)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\ \alpha_i\in\boldsymbol{R}\ \left(\text{或 }\varphi_0(x)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},\ \xi_i\in\boldsymbol{C}\right),$$

那末，在(19.4)中就命

$$X_i=\alpha_i\ (\text{或 }X_i=\xi_i).$$

假如坐标自 φ_0 变为 φ 的坐标变換的矩陣是 P，因为用新坐标表示同一 x 的向量 $\varphi(x)$ 是 $P\varphi_0(x)$，所以同样的二次形式 (或 Hermite 形式) 用新坐标表示，就成为

$$(APX, PX)=({}^tPAPX, X)$$

$$(\text{或}(HPX, PX)=(P^*HPX, X)).$$

${}^tPAP$ (或 P^*HP) 叫做用坐标 φ 表示所給二次形式(或 Hermite 形式)的矩陣。由前节定理 26，卽得

定理 28 由适当的正規直交变換 φ，任意給定的二次形式能够用对角綫型矩陣表示。关于 Hermite 形式也是同样。

系 假定关于 φ_0 的变数向量 X 用适当的正規直交坐标 φ 表示的变数向量是 Y，那末

$$(AX, X)=\alpha_1Y_1^2+\cdots+\alpha_nY_n^2. \qquad (19.5)$$

这里 α_i 是 A 的特征值。关于 Hermite 形式也同样成为

$$(HX, X)=\beta_1Y_1\overline{Y}_1+\cdots+\beta_nY_nY_n. \qquad (19.5')$$

β_i 是 H 的特征值。

坐标自 φ_0 到象上面那样的 φ 的变换叫做所給的二次形式的**主軸变換**，确定 φ 的正規直交基底的方向叫做它的**主軸的方向**。

例 2 用 §18，例 2 中的对称矩陣 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$，作二次形式 $f(X)=(AX, X)=X_1^2-X_2^2+X_3^2-2X_2X_3+6X_2X_1$，确定这 $f(X)$ 的主軸方向，并求变换后的"标准形"。

［解］ 根据在 §18，例 2 計算的結果，主軸的正規直交基底(假定用关于 φ_0 的坐标来表示)为

$$l_1=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{10}}\\ 0\\ \dfrac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix},\quad l_2=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}}\\ \dfrac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{22-2\sqrt{11}}}\end{pmatrix},\quad l_3=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}}\\ -\dfrac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{22+2\sqrt{11}}}\end{pmatrix},$$

或只表示方向，

$$l_1'=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\end{pmatrix},\quad l_2'=\begin{pmatrix}3\\ \sqrt{11}-1\\ -1\end{pmatrix},\quad l_3'=\begin{pmatrix}3\\ -\sqrt{11}-1\\ -1\end{pmatrix}.$$

变换后的"标准形"为

$$f(X)=Y_1^2+\sqrt{11}Y_2^2-\sqrt{11}Y_3^2.$$

例 3 在(19.5)，假定 $\min\alpha_i=\mu$，$\max\alpha_i=M$，那末

$$\mu(x, x)\leqslant(A\varphi_0(x), \varphi_0(x))\leqslant M(x, x),$$

或用 $x\in V$ 的任意坐标代变数向量 X(以下不預先声明时，X 总在这意义下使用)，

$$\mu(X, X)\leqslant(AX, X)\leqslant M(X, X).$$

［解］ 因为 $\mu\leqslant\alpha_i\leqslant M$，所以 $\mu Y_i^2\leqslant\alpha_iY_i^2\leqslant MY_i^2$ $(i=1, \cdots, n)$. 于是 $\mu\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_iY_i^2\leqslant M\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$. 因为 φ_0，φ 都是正規直交基底，所以 $\sum_{i=1}^{n}Y_i^2=|x|=(X, X)$. 由这及(19.5)，即得上述关系。

于是，由此立即得下面定理。

定理 29 二次形式对于X的所有值不取負值的必要充分条件

是它的矩陣的特征值为非負的。且这时，只有 $X=0$ 它才为 0 的必要充分条件是特征值都为正的。

証明 把 μ 象例 3 中那样定义，命 $\mu=\alpha_j$。假如 $\mu>0$，那末对于 $x\neq0$ 的任意 x，$(AX, X)\geqslant\mu(x, x)>0$。假如 $\mu=0$，一般 $(AX, X)\geqslant\mu(x, x)=0$。但对于給出 $Y_j=1$, $Y_i=0$ $(i\neq j)$ 的 Y 的 $x(\neq0)$，$(AX, X)=0$。假如 $\mu<0$，那末对于上面給定 Y 的 x，$(AX, X)<0$。

例 4 对于 Hermite 形式(HX, X)，同样事实也成立。把 $x\in U$ 的任意坐标代 X，$(HX, X)\in \boldsymbol{R}$ 是已如前述。与例 3 同样，

$$\mu(X, X)\leqslant(HX, X)\leqslant M(X, X).$$

这里 μ, M 分别是 H 的特征值的最小值及最大值。定理 29 也仍旧适用于 Hermite 形式。

二次形式滿足定理 29 的前面条件时叫做**半正定形式**。滿足后面条件时，叫做**恒正形式或正定形式**。

定理 30 二次形式是正定形式的必要充分条件为它的矩陣的所有主子(行列)式是正的。

証明 假定在二次形式(AX, X)中，A 的所有主子(行列)式都是正的。把 A 的 k 級主子式的总和写成 S_k，那末 $\Phi_A(T)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iS_{n-i}T^i$，但 $S_n=|A|$, $S_0=1$, $T^0=1$(这时特征多项式的变数用 T 表示)。因为 S_{n-i} 都是正的。所以，如果 $T\leqslant0$，那末 $\Phi_A(T)>0$。因此 $\Phi_A(T)=0$ 的根即 A 的特征值都是正的。于是由定理 29，(AX, X)是恒正形式。

反之，假定(AX, X)是正定形式，因为它的特征值 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都是正的，所以 $|A|=\alpha_1\cdots\alpha_n>0$。次考虑 A 的任意主子式

$$A'=\begin{pmatrix}\alpha_{\nu_1\nu_1} & \alpha_{\nu_1\nu_2} & \cdots & \alpha_{\nu_1\nu_k}\\ \alpha_{\nu_2\nu_1} & \alpha_{\nu_2\nu_2} & \cdots & \alpha_{\nu_2\nu_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{\nu_k\nu_1} & \alpha_{\nu_k\nu_2} & \cdots & \alpha_{\nu_k\nu_k}\end{pmatrix}.$$

对于小于 n 又不等于 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k$ 的自然数 l，$X_l=0$ 的这样 X 全体的集合形成 V 的 k 維子空間 W。这时，命

$$\begin{pmatrix} X_{\nu_1} \\ \vdots \\ X_{\nu_k} \end{pmatrix} = X',$$

那末，对于 $X \in W$，$(AX, X) = (A'X', X')$。于是 $(A'X', X')$ 是 k 个变数 $X_{\nu_1}, \cdots, X_{\nu_k}$ 的恒正二次形式。因此它的矩陣 A' 的行列式是正的，即 $|A'|>0$。 (証毕)

例 5 对于 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$，$(AX, X)$是正定形式。

[解] $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1.$$

二級主子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$，$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5$，一次主子式是1, 2, 6. 因为所有的主子式是正的，所以(AX, X)是正定形式。

实际上，如果求 A 的特征值就得到 $1, 4\pm\sqrt{15}$，它們都是正的。

因为 P 是正則矩陣，由 §9，例 3，A 与

$$^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{19.6}$$

有相同的秩。(19.6) 的秩是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中不为 0 的个数。假如它是 r，更假定正的个数是 s，負的个数是 t，$r=s+t$，$n=s+t+u$，$s, t, u\geqslant 0$。适当更换 α_i 的番号(如果有必要)就得到

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s>0, \quad \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_r<0.$$

在(19.5)中命

$$\left.\begin{array}{ll}\text{对于 } 1\leqslant i\leqslant s, & \sqrt{\alpha_i}\,Y_i=Z_i,\\ \text{对于 } s+1\leqslant j\leqslant r, & \sqrt{-\alpha_j}\,Y_j=Z_j,\\ \text{对于 } r+1\leqslant k\leqslant n, & Y_k=Z_k.\end{array}\right\}\qquad(19.7)$$

那末(19.5)的右边成为

$$Z_1^2+\cdots+Z_s^2-Z_{s+1}^2-\cdots-Z_r^2,\quad r=s+t.\qquad(19.8)$$

由 Y 到 Z 的变换(19.7)一般当然不是直交变换，但它是能够用矩陣

$$\begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_1} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \sqrt{\alpha_s} & & & & & \\ & & & \sqrt{-\alpha_{s+1}} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & \sqrt{-\alpha_r} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1\end{pmatrix}$$

表示的正则变换。假如这变换把坐标 φ 变为坐标 ψ，那末 ψ 一般不是正規直交坐标，但无論如何是 V 的坐标。关于它，(AX, X) 又能够象(19.8)那样簡单表示。

定理 31 (Sylvester) 假定由 V 的适当坐标 $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$, 能将 (AX, X) 表为

$$(Z_1^{(1)})^2+\cdots+(Z_{s^{(1)}}^{(1)})^2-(Z_{s^{(1)}+1}^{(1)})^2-\cdots-(Z_{r^{(1)}}^{(1)})^2,$$

$$(Z_1^{(2)})^2+\cdots+(Z_{s^{(2)}}^{(2)})^2-(Z_{s^{(2)}+1}^{(2)})^2-\cdots-(Z_{r^{(2)}}^{(2)})^2,$$

那末 $s^{(1)}=s^{(2)}$, $r^{(1)}=r^{(2)}$.

証明　因为 $r^{(1)}$, $r^{(2)}$ 都等于 A 的秩，所以 $r^{(1)}=r^{(2)}$. 其次，只要示明譬如由 $s^{(1)}<s^{(2)}$ 能够导出矛盾即可。因为这样一来必須 $s^{(1)}\geqslant s^{(2)}$，由完全同样的理由又必須 $s^{(2)}\geqslant s^{(1)}$，所以 $s^{(1)}=s^{(2)}$.

“$s^{(1)}<s^{(2)}\Rightarrow$矛盾”的証明。假如自坐标 $\psi^{(1)}$ 变到 $\psi^{(2)}$ 的坐标变换矩陣是 (α_{ij})，即

$$Z_j^{(2)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}Z_i^{(1)},\quad \alpha_{ij}\in R.$$

那末

$$(Z_1^{(1)})^2+\cdots+(Z_{s^{(1)}}^{(1)})^2-(Z_{s^{(1)}+1}^{(1)})^2-\cdots-(Z_r^{(1)})^2$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i1}Z_i^{(1)}\right)^2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{is^{(2)}}Z_i^{(1)}\right)^2$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{is^{(2)}+1}Z_i^{(1)}\right)^2-\cdots-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ir}Z_i^{(1)}\right)^2. \qquad (19.9)$$

于是考虑关于 $Z_i^{(1)}$, $i=1, \cdots, n$ 的一次齐次方程

$$Z_1^{(1)}=\cdots=Z_{s^{(1)}}^{(1)}=Z_{r+1}^{(1)}=\cdots=Z_n^{(1)}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{is^{(2)}+1}Z_i^{(1)}=\cdots=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ir}Z_i^{(1)}=0.$$

因为它的个数 $s^{(1)}+(n-r)+(r-s^{(2)})=n+s^{(1)}-s^{(2)}<n$，而未知数 $Z_i^{(1)}$ 的个数是 n，系数都是 $\boldsymbol{R}$ 中元，所以在 $\boldsymbol{R}$ 中有 $Z_i^{(1)}$ 不都是 0 的解。如果把这解代入 (19.9)，那末左边 <0，右边 $\geqslant 0$，因而引出矛盾。 (証毕)

由定理 31，(AX, X) 用 V 的适当 (不一定是正规直交) 坐标象 (19.8) 那样表示时，s, t 是一定的。(s, t) 叫做这二次形式的**符号常数**。

例 6 假定 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & -1 & 4\end{pmatrix}$，求二次形式 (AX, X) 的符号常数，并求变到 (19.8) 形状的变换矩陣。

［解］ $\Phi_A(T)=T^3-4T^2-15T=T(T^2-4T-15)$.
所以特征值是 $2\pm\sqrt{19}$, 0. 于是由适当的直交矩陣 P,

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}2+\sqrt{19} & 0 & 0\\ 0 & 2-\sqrt{19} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

更把它用

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{19}}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\sqrt{19}-2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

变換就得到(19.8)的形状

$$(AX,\ X)=Z_1^2-Z_2^2. \tag{19.10}$$

符号常数是 $s=1$, $t=1$, $u=1$.

求上面直交矩陣 P 的計算是非常麻烦的。但是只求变到(19.10)的正規变換，在变換过程中不通过直交变換 P，象下面那样进行比較簡单。

首先，因为 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5\neq 0$, $|A|=0$, 所以 $r(A)=2$. 于是得到一次方程 $A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 无关的(即不是 0)一組解。使用这解，命 $P=\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{E_2} & \begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & \xi_3\end{array}\right)$，做变換 $X=PY$，那末

$$(AX,\ X)=(APY,\ PY)=({}^tPAPY,\ Y),$$

而

$${}^tPAP=\left(\begin{array}{c|c} E_2 & 0\\ \hline \xi_1\ \ \xi_2 & \xi_3\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_0 & a\\ \hline {}^ta & a\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_2 & \begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\\ \hline 0 & \xi_3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A_0 & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right).$$

現在

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad {}^tPAP=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因此

$$(AX,\ X)=Y_1^2+4Y_1Y_2-Y_2^2=(Y_1+2Y_2)^2-5Y_2^2.$$

假如再用变換

$$\begin{cases}Z_1=Y_1+2Y_2,\\ Z_2=\sqrt{5}\,Y_2,\\ Z_3=Y_3\end{cases}\quad 即\ Y=P_1Z,\quad P_1=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

那末

$$(AX,\ X)=Z_1^2-Z_2^2,$$

自 X 变到 Z 的变换矩陣就是

$$PP_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{\sqrt{5}}&1\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

实际上，$^t(PP_1)A(PP_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，讀者試驗証之。

例 7 n 个变数 $X_1, \cdots, X_n$ 的二次多項式，用“变数向量 X”能够表为

$$f(X)=(AX,\ X)+aX+\alpha$$

的形狀。$(AX,\ X)$是 X 的二次形式(二次的“齐次部分”)，aX 是 X 的一次形式 $a_1X_1+\cdots+a_nX_n$，(这里如果用 $^t\varphi_0(a)=(a_1, \cdots, a_n)$这样的向量 a，它就能够用內积(a, X)表示。) α 是“絕对項”。假定 X 是 n 維 Euclid 空間 V 中的变向量，那末滿足 $f(X)=0$ (但 $A\neq0$) 的坐标 X 的“点”的集合 $C(f)$叫做 V 的**二次超曲面**。如果 $n=2$，$C(f)$是**二次曲綫**。如果 $n=3$，它就是普通意义的**二次曲面**。二次超曲面能够根据 A 的符号常数来“分类”，譬如在二次曲綫的情况，$1\leqslant s+t\leqslant n=2$，当 $s=2$，$t=0$ 或 $s=0$，$t=2$ 时，$C(f)$ 是椭圓，当 $s=t=1$ 时，是双曲綫，当 $r=1$ 时一般是抛物綫。

§ 20 多重綫性映射，張量积

在 § 16～§ 19 中我們討論了 Euclid 空間和酉空間，現在再来討論任意体 K 上向量空間。在本节中，因为只是就 K 上的有限維向量空間来討論，所以今后将“K 上的”以及“有限維”等字都省略而不一一声明。

在 § 12 中，联系行列式的性质考虑过象下面这样的“函数 $\mathfrak{D}$”。$\mathfrak{D}(x_1, \cdots, x_n)$定义于 $x_i\in V$ (V 是 n 維向量空間)而取 K 中值。但固定 x_i 以外的“变数”，考虑 $\mathfrak{D}(x_1, \cdots, x_n)$只是 x_i 的函数时，这 x_i 的函数記为 $\mathfrak{D}^i(x_i)$，$\mathfrak{D}^i(x_i)$是 $\mathfrak{L}(V, K)$ 中元。扩張之就得到下面的概念。

假定 $V_1, \cdots, V_m, V$ 是綫性空間，"函数" $f(x_1, \cdots, x_m)$ 定义于 $x_1 \in V_1, \cdots, x_m \in V_m$ 而取 V 中的值。如果固定 $x_1, \cdots, x_m$ 中 x_i 以外的元，考慮 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 只是 x_i 的函数，則 $f_i(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_m^0)$ 簡写成 $f_i(x_i)$。这时假如所有的 f_i（卽 $x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \cdots, x_m^0$ 任意取，又 i 作为 $1, \cdots, m$ 中任一个）都是 $\mathfrak{L}(V_i, V)$ 中元，那末 f 叫做自 $V_1, \cdots, V_m$ 到 V 的**多重**（詳細点說是 m 重）**綫性映射**。多重綫性映射全体的集合用 $\mathfrak{L}(V_1, \cdots, V_m; V)$ 表示。

例 1 1重綫性映射不外是单綫性映射。

代替"2 重"有用"双"这个詞的，又当 $V=K$ 时，代替"映射"有叫做"形式"的。譬如**双 1 次形式**是 $\mathfrak{L}(V_1, V_2; K)$ 中元。

以下直至命題 60，因为是固定 $V_1, \cdots, V_m, V$ 来考慮，所以把 $\mathfrak{L}(V_1, \cdots, V_m; V)$ 簡写成 $\mathfrak{L}$。

命題 58 对于 $f, g \in \mathfrak{L}, \alpha \in K$，假定用

$$(f+g)(x_1, \cdots, x_m) = f(x_1, \cdots, x_m) + g(x_1, \cdots, x_m),$$

$$(\alpha f)(x_1, \cdots, x_m) = \alpha f(x_1, \cdots, x_m)$$

定义 $f+g, \alpha f$，那末 $\mathfrak{L}$ 成为綫性空間。

証明是显然的。以下，假定 $\dim V_i = n_i$，φ_i 是 V_i 的坐标，$a_1^{(i)}, \cdots, a_{n_i}^{(i)}$ 是 V_i 中确定 φ_i 的基底，$\dim V = n$，φ 是 V 的坐标，$a_1, \cdots, a_n$ 是 V 中确定 φ 的基底。

命題 59 当 $f \in \mathfrak{L}$ 时，$f(x_1, \cdots, x_m)$ 的值由 $\varphi_i(x_i)$ 及 V 中 $n_1 \cdots n_m$ 个元

$$f(a_{k_1}^{(1)}, \cdots, a_{k_m}^{(m)}), \quad 1 \leqslant k_i \leqslant n_i \tag{20.1}$$

来确定。又 $x_{k_1, \cdots, k_m}$ $(1 \leqslant k_i \leqslant n_i)$ 是 V 中任意 $n_1 \cdots n_m$ 个元时，$\mathfrak{L}$ 中使 (20.1) 的值成为 $x_{k_1, \cdots, k_m}$ 这样的元 f 是唯一存在的。

証明 假定 $\varphi_i(x_i) = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} \\ \vdots \\ \lambda_{in_i} \end{pmatrix}$，卽 $x_i = \sum_{k_i=1}^{n_i} \lambda_{ik_i} a_{k_i}^{(i)}$。

由多重綫性性，显然

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum \lambda_{1k_1} \cdots \lambda_{mk_m} f(a_{k_1}^{(1)}, \cdots, a_{k_m}^{(m)}), \qquad (20.2)$$

即 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 的値由 $\varphi_i(x_i)$ 及(20.1)的値确定。又假定(20.1)的値为 $x_{k_1,\cdots,k_m}$，$f(x_1, \cdots, x_m)$ 的値由(20.2)确定，那末 f 显然是 $\mathfrak{L}$ 中元。

命題 60 对于 $1 \leqslant j_i \leqslant n_i (i=1, \cdots, m)$，用命題 59 的記法，由

$$\begin{cases} x_{j_1,\cdots,j_m} = a_k, \\ k_1 = j_1, \cdots, k_m = j_m \text{ 不成立}, x_{k_1,\cdots,k_m} = 0 \end{cases} \qquad (20.3)$$

确定的 $\mathfrak{L}$ 中元如果是 $f_{j_1,\cdots,j_m;k}$，那末这 $n_1 \cdots n_m n$ 个元形成 $\mathfrak{L}$ 的基底。

証明 假定 $\sum \lambda_{j_1,\cdots,j_m;k} f_{j_1,\cdots,j_m;k} = f$，那末 $f(a_{j_1}^{(1)}, \cdots, a_{j_m}^{(m)}) = \lambda_{j_1,\cdots,j_m;k} a_k$，因此，如果 $f=0$，那末 $\lambda_{j_1,\cdots,j_m;k}=0$，所以 $f_{j_1,\cdots,j_m;k}$ 是无关。又假定 f 是 $\mathfrak{L}$ 中任意元，如果对于 f，(20.1)的値 $x_{k_1,\cdots,k_m} = \sum \lambda_{k_1,\cdots,k_m;k} a_k$，显然 $f = \sum \lambda_{k_1,\cdots,k_m;k} f_{k_1,\cdots,k_m;k}$。

系 $\dim \mathfrak{L} = \dim V_1 \cdot \dim V_2 \cdots \dim V_m \cdot \dim V$。

因为由命題 60 的基底所得到的 $\mathfrak{L}$ 的坐标是由 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m, \varphi$ 确定的，所以用 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_m; \varphi)$ 来表示。

注意 1 对于坐标 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m, \varphi)$ 的定法与基底的顺序有关，可参照后面例 2 的前面一段（第 127 頁）。

注意 2 (20.3)也可象下面这样写，

$$f_{j_1,\cdots,j_m;k}(a_{k_1}^{(1)}, \cdots, a_{k_m}^{(m)}) = \left(\prod_{i=1}^{m} \delta_{j_i k_i}\right) a_k. \qquad (20.3')$$

定理 32 对于体 K 上有限維向量空間 $V_1, \cdots, V_m$，存在具有下面性质(i)，(ii)的 K 上向量空間 T。

(i) 自 $V_1, \cdots, V_m$ 到 T 存在一定的多重綫性映射 τ，而且 T 能够用 $\tau(x_1, \cdots, x_m)$，$x_i \in V_i$ 生成。

(ii) 假如存在自 $V_1, \cdots, V_m$ 到 K 上任意向量空間 V 的多重綫性映射 f，那就准一的存在自 T 到 V 适合下面关系的綫性映射 F：

$$\begin{array}{ccc} (V_1, \cdots, V_m) & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow^{f} & \downarrow F \\ & & V \end{array}$$

$$f = F \circ \tau. \tag{A}$$

又在 T 以外，假如有具有性质 (i)，(ii) 的 K 上向量空間 T'，如果自 $V_1, \cdots, V_m$ 到 T' 由 (i) 規定的多重綫性映射是 τ'，那就有自 T 到 T' 的同构映射 σ，使得

$$\tau' = \sigma \circ \tau,$$

$$\tau = \sigma^{-1} \circ \tau'.$$

$$\begin{array}{ccc} (V_1, \cdots, V_m) & \longrightarrow & T \\ & \searrow & \sigma^{-1} \uparrow \downarrow \sigma \\ & & T' \end{array}$$

証明 首先証明后半段"T 的唯一性"。假定 $V = T'$，如果引用 (ii)，那末 $\tau' = \sigma \circ \tau$ 这样的 $\sigma \in \mathfrak{L}(T, T')$ 存在。互換 T'，T 来同样考慮，那就有 $\tau = \sigma' \circ \tau'$ 这样的 $\sigma' \in \mathfrak{L}(T', T)$。于是 $\tau = \sigma' \circ \sigma \circ \tau$。因为由 (i)，$T$ 是由 $\tau(x_1, \cdots, x_m)$ 生成，所以对于 T 中任意元 t，$\sigma'(\sigma(t)) = t$，即 $\sigma' \circ \sigma$ 成为 T 的恒等映射。同样因为 $\sigma \circ \sigma'$ 是 T' 的恒等映射，所以 $\sigma' = \sigma^{-1}$。因此 σ 是同构映射。

次証明"T 的存在"。假定 V_i 的对偶空間 (§10) 是 $\hat{V}_i$，它的元一般用 ξ_i 表示，在

$$\mathfrak{L}(\hat{V}_1, \cdots, \hat{V}_m; K) = T \tag{20.4}$$

中，τ 可以象下面这样来定义：

$$\tau(x_1, \cdots, x_m)(\xi_1, \cdots, \xi_m) = (\xi_1, x_1) \cdots (\xi_m, x_m). \tag{20.5}$$

(i) 用 (20.5) 定义的 $\tau(x_1, \cdots, x_m)$ 实际是 T 中元，并且显然 $\tau \in \mathfrak{L}(V_1, \cdots, V_m; T)$。假定坐标 φ_i 的对偶坐标是 $\hat{\varphi}_i$，給出它的基底是 $\{\hat{a}_1^{(i)}, \cdots, \hat{a}_{n_i}^{(i)}\}$ 时，那末給出 T 的坐标 $(\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_m)$ 的基底是由适合

$$f_{j_1, \cdots, j_m}(\hat{a}_{k_1}^{(1)}, \cdots, \hat{a}_{k_m}^{(m)}) = \prod_{i=1}^{m} \delta_{j_i, k_i} \tag{20.6}$$

的 $f_{j_1, \cdots, j_m}$ 所构成。这是因为，在 (20.5) 中如果命

$$\tau(a_{j_1}^{(1)}, \cdots, a_{j_m}^{(m)}) = f_{j_1, \cdots, j_m},$$

就正好成为 (20.6) 那样，所以 T 是由这 $n_1 \cdots n_m$ 个元 $\tau(a_{j_1}^{(1)}, \cdots, a_{j_m}^{(m)})$ 生成的。

(ii) 假如 $f(a_{j_1}^{(1)}, \cdots, a_{j_m}^{(m)})=x_{j_1,\cdots,j_m}\in V$，为了(A)成立必须

$$F(\tau(a_{j_1}^{(1)}, \cdots, a_{j_m}^{(m)}))=x_{j_1,\cdots,j_m}. \tag{20.7}$$

又象上面所示，因为 $\tau(a_{j_1}^{(1)}, \cdots, a_{j_m}^{(m)})$ 是 T 的基底，所以由 (20.7) 能够确定 $F\in\mathfrak{L}(T, V)$。 (証毕)

具有定理 32 中性质 (i), (ii) 的向量空間 T 叫做 $V_1, \cdots, V_m$ 的**張量积**，用 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 或 $\bigotimes_{i=1}^{m} V_i$ 表示。又 $\tau(x_1, \cdots, x_m)$ 用 $x_1\otimes\cdots\otimes x_m$ 或 $\bigotimes_{i=1}^{m} x_i$ 表示。因为 τ 是多重綫性映射，所以

$$x_1\otimes(x_2+y_2)=x_1\otimes x_2+x_1\otimes y_2,$$

$$x_1\otimes\alpha x_2=\alpha(x_1\otimes x_2).$$

又因为 $\dim\hat{V}_i=\dim V_i=n_i$，所以由命題 60 系，

$$\dim(V_1\otimes\cdots\otimes V_m)=\dim V_1\cdots\dim V_m.$$

并且象上面所示，$a_{j_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_{j_m}^{(m)}$ $(1\leqslant j_i\leqslant n_i)$ 构成 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 的基底。在构成这个基底的 $n_1\cdots n_m$ 个元中，任意两个元 $a=a_{j_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_{j_m}^{(m)}$ 与 $a'=a_{j_1'}^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_{j_m'}^{(m)}$，如果 $j_1=j_1', \cdots, j_\nu=j_\nu', j_{\nu+1}\leqslant j_{\nu+1}'$，那末把 a 放在 a' 的前面。由这顺序确定的坐标用 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ 表示。

例 2 假定 $V_1=[a_1, a_2]$, $V_2=[b_1, b_2, b_3]$, $V_3=[c_1, c_2]$，那末

$$\begin{aligned}V_1\otimes V_2\otimes V_3=[&a_1\otimes b_1\otimes c_1,\ a_1\otimes b_1\otimes c_2,\ a_1\otimes b_2\otimes c_1,\ a_1\otimes b_2\otimes c_2,\\ &a_1\otimes b_3\otimes c_1,\ a_1\otimes b_3\otimes c_2,\ a_2\otimes b_1\otimes c_1,\ a_2\otimes b_1\otimes c_2,\\ &a_2\otimes b_2\otimes c_1,\ a_2\otimes b_2\otimes c_2,\ a_2\otimes b_3\otimes c_1,\ a_2\otimes b_3\otimes c_2],\end{aligned}$$

依这顺序的基底所确定的 $V_1\otimes V_2\otimes V_3$ 的坐标是 $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$。

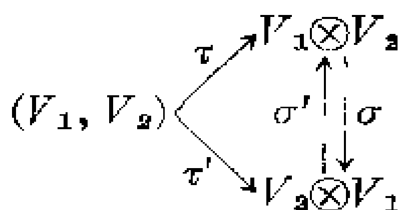
例 3 在右图中，把 F 与 f 对应得到 $\mathfrak{L}(V_1,\cdots, V_m; V)$ 与 $\mathfrak{L}(V_1\otimes\cdots\otimes V_m, V)$ 的同构映射。

$$\begin{array}{ccc}(V_1,\cdots,V_m) & \xrightarrow{\ \tau\ } & V_1\otimes\cdots\otimes V_m\\ & f\searrow\quad\swarrow F & \\ & V & \end{array}$$

命題 61 $V_1\otimes V_2$ 与 $V_2\otimes V_1$ 由 $x_1\otimes x_2\to x_2\otimes x_1$ 对应成为同构。

証明 假定 $\tau(x_1, x_2)=x_1\otimes x_2$, $\tau'(x_1, x_2)=x_2\otimes x_1$，那末

$\tau\in\mathfrak{L}(V_1, V_2; V_1\otimes V_2)$, $\tau'\in\mathfrak{L}(V_1, V_2; V_2\otimes V_1)$. 再对于这，引用



(ii) 与上面唯一性的証明同样考虑，即得所証。

下面的命题完全同样。

命題 62 $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\cong V_1\otimes(V_2\otimes V_3)\cong V_1\otimes V_2\otimes V_3$.

例 4 $V\otimes K\cong V$, $V_1\otimes\hat{V}_2\cong\mathfrak{L}(V_1, V_2)$.

例 5 由 $x_1\otimes x_2$ 的多重綫性性得 $x_1\otimes 0=0\otimes x_2=0$。又假如 $x_1\otimes x_2=0$，那末 $x_1=0$ 或 $x_2=0$.（如果 $x_1\neq 0$, $x_2\neq 0$，那就能够取 x_1, x_2 分别作为 V_1, V_2 的基底中元，因此就能够把 $x_1\otimes x_2$ 作为 $V_1\otimes V_2$ 的基底中元。）

命題 63 假定 f_i 是自向量空間 V_i 到向量空間 W_i 的綫性映射，$f_i\in\mathfrak{L}(V_i, W_i)$, $i=1, \cdots, m$，那末，对于 $x_1\otimes\cdots\otimes x_m\in V_1\otimes\cdots\otimes V_m$，使 $f_1(x_1)\otimes\cdots\otimes f_m(x_m)\in W_1\otimes\cdots\otimes W_m$ 与之对应的 $\mathfrak{L}(V_1\otimes\cdots\otimes V_m, W_1\otimes\cdots\otimes W_m)$ 中元 f 是唯一地存在的。

証明 $\mathfrak{L}(V_1\otimes\cdots\otimes V_m, W_1\otimes\cdots\otimes W_m)$ 中元 f 如果对于 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 的基底 $a_{k_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_{k_m}^{(m)}$ 的值 $f(a_{k_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_{k_m}^{(m)})$ 已給定，它就唯一确定。現在假定

$$f(a_{k_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_{k_m}^{(m)})=f_1(a_{k_1}^{(1)})\otimes\cdots\otimes f_m(a_{k_m}^{(m)}), \qquad (20.8)$$

显然 $f(x_1\otimes\cdots\otimes x_m)=f_1(x_1)\otimes\cdots\otimes f_m(x_m)$，这就是所求的 f.

（証毕）

系 对于 $\otimes\mathfrak{L}(V_i, W_i)$ 中元 $\otimes f_i$，假如使上面的 f 与之对应，那就得到自 $\otimes\mathfrak{L}(V_i, W_i)$ 到 $\mathfrak{L}(\otimes V_i, \otimes W_i)$ 上的同构映射。（系毕）

通常把 $\otimes f_i$ 与 f 同样看待，叫 f 做 f_i 的張量积或 **Kronecker** 积。

假如 V_i, W_i 的坐标分别是 φ_i, ψ_i，那末 $\otimes V_i$, $\otimes W_i$ 分别有坐标 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$, $(\psi_1, \cdots, \psi_m)$. 假如由 φ_i, ψ_i 表示 f_i 的矩陣是 F_i，那末由坐标 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$, $(\psi_1, \cdots, \psi_m)$ 表示 $f=\otimes f_i$ 的矩

陣应該如何？假定 $F_i=(a_{jk}^{(i)})$，因为

$$f_i(a_{k_i}^{(i)})=\sum_{j_i=1}^{l_i}a_{j_ik_i}^{(i)}b_{j_i}^{(i)}\begin{pmatrix}l_i=\dim W_i,\ b_1,\ \cdots,\ b_{l_i}\ \text{是}\\ W_i\ \text{中确定}\ \psi_i\ \text{的基底}\end{pmatrix},$$

由(20.8)，得

$$f(a_{k_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_{k_m}^{(m)})=\sum_{j_1=1}^{l_1}\cdots\sum_{j_m=1}^{l_m}a_{j_1k_1}^{(1)}\cdots a_{j_mk_m}^{(m)}b_{j_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes b_{j_m}^{(m)}. \quad (20.9)$$

因为确定 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 的坐标 $(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)$ 的基底正好是 $a_{k_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes a_{k_m}^{(m)}$，$1\leqslant k_i\leqslant n_i$，确定 $W_1\otimes\cdots\otimes W_m$ 的坐标 $(\psi_1,\cdots,\psi_m)$ 的基底是 $b_{j_1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes b_{j_m}^{(m)}$，$1\leqslant j_i\leqslant l_i$，所以由坐标 $(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)$，$(\psi_1,\cdots,\psi_m)$ 表示 f 的矩陣显然是 $(\prod\dim W_i,\prod\dim V_i)$ 型的矩陣 $F=(a_{j_1k_1}^{(1)}\cdots a_{j_mk_m}^{(m)})$。这矩陣 F 不外是映射 $F_i\in\mathfrak{L}(K^{n_i},K^{l_i})$ 的張量积 $F_1\otimes\cdots\otimes F_m$。

例 6 假定 $F_1=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}\end{pmatrix}$，$F_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，那末

$$F_1\otimes F_2=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\beta_1&\alpha_{11}\beta_2&\alpha_{11}\beta_3&\alpha_{12}\beta_1&\alpha_{12}\beta_2&\alpha_{12}\beta_3\\ \alpha_{21}\beta_1&\alpha_{21}\beta_2&\alpha_{21}\beta_3&\alpha_{22}\beta_1&\alpha_{22}\beta_2&\alpha_{22}\beta_3\\ \alpha_{31}\beta_1&\alpha_{31}\beta_2&\alpha_{31}\beta_3&\alpha_{32}\beta_1&\alpha_{32}\beta_2&\alpha_{32}\beta_3\end{pmatrix}.$$

一般，假定 $F_1=(\alpha_{jk})$，那末

$$F_1\otimes F_2=\begin{pmatrix}\alpha_{11}F_2&\alpha_{12}F_2&\cdots&\alpha_{1n}F_2\\ \alpha_{21}F_2&\alpha_{22}F_2&\cdots&\alpha_{2n}F_2\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \alpha_{n1}F_2&\alpha_{n2}F_2&\cdots&\alpha_{nn}F_2\end{pmatrix}.$$

例 7 当 $f_1,g_1\in\mathfrak{L}(V_1,W_1)$，$\alpha\in K$ 时，

$$(f_1+g_1)\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_m=f_1\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_m+g_1\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_m,$$

$$(\alpha f_1)\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_m=\alpha(f_1\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_m).$$

例 8 假定 $f_i\in\mathfrak{L}(V_i,W_i)$，$g_i\in\mathfrak{L}(W_i,U_i)$，那末

$$(g_1\otimes\cdots\otimes g_m)\circ(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)=(g_1\circ f_1)\otimes\cdots\otimes(g_m\circ f_m).$$

于是对于矩陣的張量积，例 7，8 中的式子同样成立。

假定非負的整数 p，q 及向量空間 V 已給定，那末 p 个 V 及 q 个 $\hat{V}$ 的張量积

$$\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{p\text{ 个}}\otimes\underbrace{\hat{V}\otimes\cdots\otimes\hat{V}}_{q\text{ 个}}$$

(这張量积的順序即令变动，但命題 61,62 中产生的空間之間"标准的"同构关系仍然成立) 叫做 V 上的 **(p, q) 型張量空間**，用 $T^p_q(V)$ 表示。$T^0_q(V)$ 单写成 $T_q(V)$，$T^p_0(V)$ 单写成 $T^p(V)$。$T^0_0(V)$ 就是 K。

例 9 $T^1(V)=V$, $T_1(V)=\hat{V}$, $\dim T^p_q(V)=(\dim V)^{p+q}$.

于是直和空間 $\sum_{p,q\geq 0}\otimes T^p_q(V)$ 用 $T(V)$ 表示，它叫做 V 上**張量空間**，它的元叫做 V 上的**張量**。特别，$T^0_0(V)=K$ 中元不外是数量，$T^1(V)=V$ 中元不外是向量。V 中元又叫做**逆变向量**。与这对应，$T_1(V)=\hat{V}$ 中元又叫做**协变向量**。$T^p_q(V)$ 中元叫做**逆变 p 阶协变 q 阶的張量**。当 $p>0$, $q>0$ 时也叫做**混合張量**。

例 10 $T(V)$ 是 K 上无限維向量空間，因为 $T^p_q(V)$ 中元与 $T^{p'}_{q'}(V)$ 中元的張量积显然成为 $T^{p+p'}_{q+q'}(V)$ 中元，所以 $T(V)$ 对于这"張量乘法"成为环，并且成为 K 上代数(§7)。它叫做 V 上**張量代数**。

假定 V 的坐标 φ 确定，那末 $\hat{V}$ 对偶坐标 $\hat{\varphi}$ 确定，$T^p_q(V)$ 坐标 $(\varphi, \cdots, \varphi, \hat{\varphi}, \cdots, \hat{\varphi})$ 也确定。这坐标如果用 φ^p_q 表示，那末确定 φ^p_q 的 $T^p_q(V)$ 的基底是 $a_{j_1}\otimes\cdots\otimes a_{j_p}\otimes\hat{a}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\hat{a}_{k_q}$, $1\leqslant j_i\leqslant n$, $1\leqslant k_l\leqslant n$. $T^p_q(V)$ 中任意元 x 能够表为

$$x=\sum\xi_{j_1\cdots j_pk_1\cdots k_q}a_{j_1}\otimes\cdots\otimes a_{j_p}\otimes\hat{a}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\hat{a}_{k_q}$$

的形状。$(\dim V)^{p+q}$ 个 K 中元 $\xi_{j_1\cdots j_pk_1\cdots k_q}$ 是 x 关于 φ^p_q 的坐标。习惯上逆变的番号記在上肩，因此它写成 $\xi^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q}$.

假定 V 的坐标自 φ 变为 ψ，那末 $T^p_q(V)$ 的坐标就自 φ^p_q 变为 ψ^p_q. x 关于 ψ^p_q 的坐标假如是 $\eta^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q}$. 自 φ 到 ψ 的变换矩陣假如是 $P=(\pi_{hl})$，因为 V 自坐标 $\hat{\varphi}$ 到 $\hat{\psi}$ 的变换矩陣是 ${}^tP=(\pi_{lh})$，根据命題 63 后面記述的事实，自 φ^p_q 到 ψ^p_q 的变换矩陣为 $P\otimes\cdots\otimes P\otimes{}^tP\otimes\cdots\otimes{}^tP$. 假如依照习惯把 π_{hl} 記成 π^h_l，那末

$$\eta_{k_1\cdots k_q}^{l_1\cdots l_p}=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\sum_{h_1=1}^{n}\cdots\sum_{h_q=1}^{n}\pi_{i_1}^{l_1}\cdots\pi_{i_p}^{l_p}\pi_{k_1}^{h_1}\cdots\pi_{k_q}^{h_q}\xi_{h_1\cdots h_q}^{i_1\cdots i_p}, \tag{20.10}$$

在这样式子中，和的記号 $\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\sum_{h_1=1}^{n}\cdots\sum_{h_q=1}^{n}$ 有时简称为 **Einstein 規約**。Einstein 在相对論的記述中，頻繁地应用張量运算，为簡化这种記法引入了这規約。(原来張量是定义为当坐标变换具有象(20.10)那样变换分量的"量"。)

以上只叙述了綫代数中最基础的事項，但已超过預定的篇幅。本章不得不在这里停止。下面就它范圍內剩下的(包含在本丛书其他书籍中的內容)略进一言。

关于向量的內积在§16，§17中已叙述，但关于**外积**就沒有接触到。一般，它能够作为联系張量积的**交代积**的概念来叙述，这在李群論一书中应該有所記述。至于向量和張量的几何学的物理学的应用都在几何学一书中介紹。

在§3，§7等的例中所叙述的各种函数空間都是向量空間，但关于它的解析理論預定在引入适当的拓扑条件之后，将在泛函分析、广义函数等书中討論。又关于矩陣的"解析函数"$\left(\exp F=E+F+\frac{F^2}{2!}+\frac{F^3}{3!}+\cdots\text{等}\right)$ 在上面也沒有接触机会。在考虑它們时，基础体的拓扑是重要的。譬如基础体是复数体 C 时，"指数級数"总是收斂而且有 $\exp F$ 的意义。当 $F_1F_2=F_2F_1$ 时，能容易証明 $\exp(F_1+F_2)=\exp F_1\cdot\exp F_2$ 等，这都作为讀者的练习。

第2章　群，Boole 代数，有限体

在这短短的第2章里，将就群，Boole 代数，有限体这三种代数系分别作简单解說。其中群对于数学有一般的基本意义，但 Boole 代数，有限体却是相当特殊的代数系。三者之間沒有特別密切的关系。只是因为这些代数系在新的应用数学的各个部分都須用到，而在本丛书的其他书籍中沒有机会介紹，因此，有关它們的基本事項只有在这里来叙述。

第1章关于綫代数的內容无論如何总能够进行系統的說明。下面第3章有限群的表現論亦能系統地进行叙述。但是这第2章，由于上述那种情况，全章不能建立一貫的体系。这点希望預先得到讀者的了解（又本章中群的部分乃是第3章所必須的准备）。

§21　变换群的概念

作为代数系来定义群是容易的，但这样做对于初次接受这概念的讀者有"过分抽象"的缺点。因此还是按照历史的順序从变换群的概念的說明开始。

群 (group) 这个名詞在数学史上开始使用的是 Galois. 根据这概念，Lagrange 等的"代数方程的形而上学"是被数学化了（参照 A. Weil "自形而上学到数学"，科学 Vol. 26, No. 12）。下面用最簡单的例子来說明 Lagrange 和 Galois 的思想方法。

讀者想已知道对称式，交代式这些名詞。譬如象 $x+y+z$，$xy+yz+zx$ 这样，任意互换变数 x, y, z 而不变的多項式是 x, y, z 的对称式，象 $(y-z)(z-x)(x-y)$，$x^k(y-z)+y^k(z-x)+z^k(x-y)$ 这样任意互换 x, y, z 中两个只改变符号的多項式是交代式。但是象 $x+2y+3z$ 这样就既不是对称式也不是交代式。

为了明确概念，来考虑复数体 C 上 n 个变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的多

項式

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\sum a_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}, \quad a_{k_1\cdots k_n}\in C. \qquad (21.1)$$

这里 $k_1, \cdots, k_n$ 取非負的整数值，$\sum$ 当然是意味有限和。表示变数的“互換”用下面引入的那种記法是非常方便的。假定 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是 n 个文字 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列，把变数的添数 $1, 2, \cdots, n$ 分別用 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ 代换的事实用

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix} \qquad (21.2)$$

表示。象这样的互换叫做置換。置換也有用 $\pi, \varkappa, \cdots$ 等文字来表示的。令假定 (21.2) 的置換是 π. 由 n 个文字 $1, 2, \cdots, n$ 形成的“空間”(为了把集合几何学地表达，也叫它做“空間”)是 S，那末 π 是自 S 到 S 的全单射，$\pi: S\to S$. 在这意义下，用函数記号写成 $\pi(i)=\nu_i$. 对于 (21.2)，在第 1 行中 i 之下写它的象 $\pi(i)=\nu_i$ 是重要的，而第 1 行排列为 $1, 2, \cdots, n$ 的順序不是必要的。譬如

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & \cdots & n\\ \nu_2 & \nu_1 & \nu_3 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}. \qquad (21.2')$$

当 $\nu_1=1, \nu_2=2, \cdots, \nu_n=n$ 时，(21.2) 显然成为 S 的恒等映射 ε. 又假如結合 (21.2) 的 π 与

$$\varkappa=\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu_1, \cdots, \mu_n \text{ 是 } 1, \cdots, n\\ \text{的另一个排列}\end{pmatrix}, \qquad (21.3)$$

那就得

$$\varkappa\circ\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix}.$$

特别，

$$\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

是 π 的逆映射 π^{-1}. 因为 n 个文字有 $n!$ 种排列，所以 $S=\{1,$

$2,\cdots,n\}$的置换全体的集合$\mathfrak{S}(S)$是由$n!$个元$\varepsilon,\pi,\varkappa,\cdots$构成的。

注意　上面的$\varkappa\circ\pi$也有写成$\pi\varkappa$的。在本书是写成$\varkappa\circ\pi$，即把先行使的置换后写。$\varkappa\circ\pi$与$\pi\circ\varkappa$一般不同。

例1　只互换两文字1，2的

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix} \tag{21.4}$$

叫做1，2的**互换**，用$(1\ 2)$表示。又一般对于π，命$\pi^0=\varepsilon,\pi^1=\pi,\pi^2=\pi\pi,\cdots,\pi^k=(\pi^{k-1})\pi,\ \pi^{-k}=(\pi^{-1})^k$。于是如果$k$是偶数，$(1\ 2)^k=\varepsilon$；如果$k$是奇数，$(1\ 2)^k=(1\ 2)$。

注意　在(21.2)的記法中，当$i=\nu_i$时即略去$\begin{smallmatrix}i\\ \nu_i\end{smallmatrix}$。譬如(21.4)又写成$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$。

例2　$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n\\ \mu_{\nu_1} & \mu_{\nu_2} & \cdots & \mu_{\nu_n}\end{pmatrix}$。

例3　假定$S=\{1,2\}$，那末$\mathfrak{S}(S)=\{\varepsilon,(1\ 2)\}$。恒等映射$\varepsilon$也有写成(1)的。

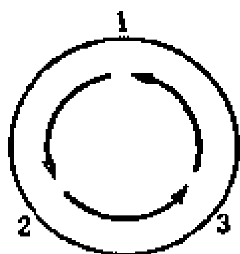


图　21.1

例4　置换$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$叫做1,2,3的**循环置换**，用$(1\,2\,3)$表示。$\left(\text{同样}(1\,2\,3\cdots k)\text{表示}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k\\ 2 & 3 & \cdots & k & 1\end{pmatrix}\text{。}\right)$当$S=\{1,2,3\}$时，$\mathfrak{S}(S)$是由下面六个元构成：$(1)$，$(1\ 2)$，$(2\ 3)$，$(1\ 3)$，$(1\ 2\ 3)$，$(1\ 3\ 2)$。关于它們，下面的关系成立：

$$(1\ 3)(1\ 2)=(1\ 2\ 3),\quad (1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2)=(1)：$$

例5　当$S=\{1,2,3,4\}$时，$\mathfrak{S}(S)$是由下面$4!=24$个元构成：

(1), $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(1\ 4)$, $(2\ 3)$, $(2\ 4)$, $(3\ 4)$,

$(1\ 2\ 3)=(1\ 3)(1\ 2)$, $(1\ 2\ 4)=(1\ 4)(1\ 2)$, $(1\ 3\ 2)=(1\ 2)(1\ 3)$,

$(1\ 3\ 4)=(1\ 4)(1\ 3)$, $(1\ 4\ 2)=(1\ 2)(1\ 4)$, $(1\ 4\ 3)=(1\ 3)(1\ 4)$,

$(2\ 3\ 4)=(2\ 4)(2\ 3)$, $(2\ 4\ 3)=(2\ 3)(2\ 4)$,

$(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 3)$,

$(1\ 2\ 3\ 4)$, $(1\ 2\ 4\ 3)$, $(1\ 3\ 2\ 4)$, $(1\ 3\ 4\ 2)$, $(1\ 4\ 2\ 3)$, $(1\ 4\ 3\ 2)$.

假定对于C上n个变数的多项式(21.1)施行置换(21.2)，那就得到

$$f(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \cdots, x_{\nu_n}) = \sum a_{k_1\cdots k_n} x_{\nu_1}^{k_1}\cdots x_{\nu_n}^{k_n}.$$

这事实用下式表示:

$$\pi(f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = f(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \cdots, x_{\nu_n}). \qquad (21.5)$$

例 6 $\varkappa(\pi(f(x_1, \cdots, x_n))) = \varkappa\circ\pi(f(x_1, \cdots, x_n))$.

例 7 对于 $f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ 施行 $\mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$ 中六个置换的結果如下:

$$(1)(f(x_1, x_2, x_3)) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$
$$(1\ 2)(f(x_1, x_2, x_3)) = a_2x_1 + a_1x_2 + a_3x_3,$$
$$(2\ 3)(f(x_1, x_2, x_3)) = a_1x_1 + a_3x_2 + a_2x_3,$$
$$(1\ 3)(f(x_1, x_2, x_3)) = a_3x_1 + a_2x_2 + a_1x_3,$$
$$(1\ 2\ 3)(f(x_1, x_2, x_3)) = a_3x_1 + a_1x_2 + a_2x_3,$$
$$(1\ 3\ 2)(f(x_1, x_2, x_3)) = a_2x_1 + a_3x_2 + a_1x_3.$$

于是多項式(21.1)是**对称式**意指对 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 施行 $\mathfrak{S}(S)$ 的任意置換 π 而不变，即用

$$\pi(f(x_1, \cdots, x_n)) = f(x_1, \cdots, x_n), \ \forall\pi\in\mathfrak{S}(S)$$

($\forall\pi\in\mathfrak{S}(S)$ 讀成"对于 $\mathfrak{S}(S)$ 中所有元 π")来定义，(21, 1)是**交代式**意指 f 对于 $\mathfrak{S}(S)$ 中任意对換 (ij) 只变符号，用下式定义:

$$(ij)(f(x_1, \cdots, x_n)) = -f(x_1, \cdots, x_n).$$

例 8 在例 7 中，$f(x_1, x_2, x_3)$ 是对称式的必要充分条件是 $a_1 = a_2 = a_3$，是交代式的必要充分条件是 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

上面交代式的定义比对称式的定义也許感到不自然。但是它的必然性能够象下面那样来說明(参照后面的命題 5)。

命題 1 $\mathfrak{S}(S)$ 中任意元能够表示为几个对換的結合。

証明 用 62 頁所示的方法也能够証明，但在这里用关于 S 中元的个数的数学归納法来証明。

假定 $S = \{1, 2\}$，那末 $\mathfrak{S}(S) = \{(1), (1\ 2)\}$，因为 $(1) = (1\ 2)(1\ 2)$，所以这时命題成立。

对于 $S = \{1, \cdots, n-1\}$，假定命題成立，来考虑 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$，

这时命 $\mathfrak{S}(S)$ 中任意元

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_{n-1} & \nu_n\end{pmatrix}.$$

如果 $\nu_n=n$，那末 $\pi=\begin{pmatrix}1 & \cdots & n-1\\ \nu_1 & \cdots & \nu_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}(\{1, 2, \cdots, n-1\})$，所以 π 能够表为对换的結合。如果 $\nu_n\neq n$，命 $\nu_k=n$，那末

$$\pi=(n\ \nu_n)\begin{pmatrix}1, & \cdots, & k-1, & k, & k+1, & \cdots, & n-1, & n\\ \nu_1, & \cdots, & \nu_{k-1}, & \nu_k, & \nu_{k+1}, & \cdots, & \nu_{n-1}, & n\end{pmatrix},$$

所以还是能够表为对换的結合。

系 假如多項式 f 对于所有的对换不变，那末 f 是对称式。

假如把(21.5)右边的多項式，叫做对于 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 施行置换 π 的"值"，那末对由上定义的对称式施行 $\mathfrak{S}(S)$ 中 $n!$ 个置换时，总是形成"等价"的多項式(所謂两多項式

$$\sum\alpha_{k_1\cdots k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n},\quad \sum\beta_{k_1\cdots k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$$

等价是指对于所有的 $k_1, \cdots, k_n$，

$$\alpha_{k_1\cdots k_n}=\beta_{k_1\cdots k_n},$$

卽对应的系数相等)。于是作为对称式的"次簡单的"多項式，可以认为是施行 $\mathfrak{S}(S)$ 中 $n!$ 个置换时，恰好只取两个值的多項式。这样的多項式暫时叫做"两值多項式"。

假定 f 是两值多項式，$\pi(f)$ $(\pi\in\mathfrak{S}(S))$ 所取的两値是 f_1, f_2 $(f_1\neq f_2)$. 如果 $\varepsilon(f)=f_1$，由命題1，对于适当的对换 $\tau=(i\ j)$，必須 $\tau(f)=f_2$. 今假定 $\mathfrak{S}_1=\{\pi_1; \pi_1\in\mathfrak{S}(S), \pi_1(f)=f_1\}$, $\mathfrak{S}_2=\{\pi_2; \pi_2\in\mathfrak{S}(S), \pi_2(f)=f_2\}$，那末 $\varepsilon\in\mathfrak{S}_1$, $\tau\in\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}(S)=\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$.

命題 2 $\mathfrak{S}_1$ 有下列各性质：

(i) $\mathfrak{S}_1\ni\pi_1\Rightarrow\mathfrak{S}_1\ni\pi_1^{-1}$.

(ii) $\mathfrak{S}_1\ni\pi_1, \pi_1'\Rightarrow\mathfrak{S}_1\ni\pi_1'\circ\pi_1$.

證明 (i) 因为 $f_1=f$, $\pi_1(f)=f_1$，所以 $\pi_1^{-1}(f)=\pi_1^{-1}(\pi_1(f))$

$=(\pi_1^{-1}\circ\pi_1)(f)=\varepsilon(f)=f_1$. 因此 $\pi_1^{-1}\in\mathfrak{S}_1$.

(ii) $(\pi_1'\circ\pi_1)(f)=\pi_1'(\pi_1(f))=\pi_1'(f_1)=\pi_1'(f)=f_1$, 所以 $\pi_1'\circ\pi\in\mathfrak{S}_1$.

系 設 $\pi_1\in\mathfrak{S}_1$, 則 $\pi_1(f_2)=f_2$, 即 $\mathfrak{S}_1$ 中元分別不变 f_1, f_2.

証明 假定 $\pi_1(f_2)=f_1$, 那末 $\pi_1^{-1}(f_1)=f_2$, 这与命题 2 (i) 矛盾。

命题 3 $\mathfrak{S}_2$ 中元对换 f_1, f_2. 即假定 $\pi_2\in\mathfrak{S}_2$, 那末 $\pi_2(f_1)=f_2$, $\pi_2(f_2)=f_1$.

証明 $\pi_2(f_1)=f_2$ 由 $\mathfrak{S}_2$ 的定义自明。又 $\pi_2(f_2)=f_1$ 意味着 $\pi_2^{-1}(f_1)=f_2$. 假如 $\pi_2^{-1}(f_1)=f_1$, 由命题 2(i) 得 $\pi_2\in\mathfrak{S}_1$, 这与假設矛盾。

例 9 (i) $\mathfrak{S}_1\ni\pi_1$, $\mathfrak{S}_2\ni\pi_2\Rightarrow\pi_1\circ\pi_2\in\mathfrak{S}_2$, $\pi_2\circ\pi_1\in\mathfrak{S}_2$.

(ii) $\mathfrak{S}_2\ni\pi_2$, $\pi_2'\Rightarrow\pi_2\circ\pi_2'\in\mathfrak{S}_1$.

例 10 一般对于 $\mathfrak{S}$ 的子集合 $\mathfrak{T}$ 及 $\pi\in\mathfrak{S}$, 假定

$$\{\pi\circ\varkappa;\varkappa\in\mathfrak{T}\},\quad\{\varkappa\circ\pi;\varkappa\in\mathfrak{T}\}$$

分别用 $\pi\circ\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}\circ\pi$ 表示, 那末 $\mathfrak{S}_2=\tau\circ\mathfrak{S}_1=\mathfrak{S}_1\circ\tau$.

[解] $\tau\circ\mathfrak{S}_1\subset\mathfrak{S}_2$ 是明显的。反之, 假如 $\varkappa\in\mathfrak{S}_2$, 因为 $\tau\varkappa\in\mathfrak{S}_1$, $\tau^{-1}=\tau$, 所以 $\varkappa=\tau(\tau\varkappa)\in\tau\circ\mathfrak{S}_1$, 因此 $\mathfrak{S}_2\subset\tau\circ\mathfrak{S}_1$. 于是 $\mathfrak{S}_2=\tau\circ\mathfrak{S}_1$. 同样 $\mathfrak{S}_2=\mathfrak{S}_1\circ\tau$.

例 11 对于任意 $\pi\in\mathfrak{S}$ 有 $\pi\circ\mathfrak{S}_1\circ\pi^{-1}=\mathfrak{S}_1$.

[解] 假定 $\pi\in\mathfrak{S}_1$, 那末 $\pi^{-1}\in\mathfrak{S}_1$. 所以 $\pi\circ\mathfrak{S}_1\circ\pi^{-1}\subset\mathfrak{S}_1$. 同样 $\pi^{-1}\circ\mathfrak{S}_1\circ\pi\subset\mathfrak{S}_1$. 于是 $\mathfrak{S}_1\subset\pi\circ\mathfrak{S}_1\circ\pi^{-1}$. 因此 $\pi\circ\mathfrak{S}_1\circ\pi^{-1}=\mathfrak{S}_1$.

假定 $\pi\in\mathfrak{S}_2$, 因为 $\pi=\tau\circ\pi_1$, $\pi_1\in\mathfrak{S}_1$, 所以 $\pi\circ\mathfrak{S}_1\circ\pi^{-1}=(\tau\circ\pi_1)\circ\mathfrak{S}_1\circ(\pi_1^{-1}\circ\tau^{-1})=\tau\circ(\pi_1\circ\mathfrak{S}_1\circ\pi_1^{-1})\circ\tau^{-1}=\tau\circ\mathfrak{S}_1\circ\tau^{-1}=\mathfrak{S}_2\circ\tau^{-1}=\mathfrak{S}_1$. 这最后的部分是根据例 10。

例 12 所有的对换属于 $\mathfrak{S}_2$.

[解] $\tau=(i\ j)\in\mathfrak{S}_2$, 假如一个对换 $(k\ l)\in\mathfrak{S}_1$, 由例 11, $\begin{pmatrix}k & l\\ i & j\end{pmatrix}(k\ \ l)\begin{pmatrix}k & l\\ i & j\end{pmatrix}^{-1}=(i\ j)=\tau\in\mathfrak{S}_1$, 这与假設不合。

命题 4 f_1+f_2 是对称式, f_1-f_2 是交代式。

証明 假如 $\pi_1\in\mathfrak{S}_1$, 那末 $\pi_1(f_1+f_2)=f_1+f_2$. 假如 $\pi_2\in\mathfrak{S}_2$,

那末 $\pi_2(f_1+f_2)=f_2+f_1=f_1+f_2$. 所以对于 $\mathfrak{S}$ 中任意元 π, $\pi(f_1+f_2)=f_1+f_2$，因此 f_1+f_2 是对称式。

又假如 $\pi_2\in\mathfrak{S}_2$，那末 $\pi_2(f_1-f_2)=f_2-f_1=-(f_1-f_2)$，因此 f_1-f_2 由 $\mathfrak{S}_2$ 中任意元只改变符号。因为对换都属于 $\mathfrak{S}_2$，于是 f_1-f_2 由任意对换只改变符号。所以它是交代式。

系 任意两值多项式能够表为对称式 $\frac{f_1+f_2}{2}$ 与交代式 $\frac{f_1-f_2}{2}$ 的和。

在交代式中，

$$p(x_1, \cdots, x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$$

叫做 $x_1, \cdots, x_n$ 的**最簡交代式**。对于 $x_1, \cdots, x_n$ 的任意交代式 $g(x_1, \cdots, x_n)$，$(i\ j)(g)=-g$，即

$$g(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)=-g(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n),$$

因此如果 $x_i=x_j$，那末 $g=0$. 于是由剩余定理，g 能够用 (x_i-x_j) 除尽。因为这对于 i, j 的任何組合都成立，所以 g 能够用最簡交代式 p 除尽，因而有适合 $g=ph$ 的多項式 h. 显然 h 是对称式。由命題 4 的系及这事实得下面的命題。

命題 5 任意两值多項式 f 能用适当的对称式 f_0, h 及最簡单交代式 p 写成 f_0+ph 的形状。

由以上的討論可以了解交代式特别是最簡交代式的意义。又如所周知，任意对称式能够表为所謂**基本对称式**

$$\sum_{i=1}^{n}x_i, \quad \sum_{i<j}x_ix_j, \quad \sum_{i<j<k}x_ix_jx_k, \quad \cdots, \quad x_1x_2\cdots x_n \qquad (21.6)$$

的多項式。因此任意两值多項式能够表为这 n 个式与最簡交代式 p 的多項式。

根据上面的事实，熟知的二次方程的解法能够如下地說明。

假定二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的根是 x_1, x_2，那末 $x^2+ax+b=(x-x_1)(x-x_2)$，于是

$$-a=x_1+x_2,\quad b=x_1x_2$$

是 x_1, x_2 的基本对称式。命 $f(x_1,x_2)=x_1$，那末它是 x_1,x_2 的二值多项式。于是由上述事实能够用对称式 f_0, h 与 $p(x_1,x_2)=x_1-x_2$ 表示 $x_1=f_0+ph$. 用上面記法，因为 $f_1=x_1$, $f_2=(1\ 2)(f)=x_2$, 所以

$$f_0=\frac{1}{2}(f_1+f_2)=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a}{2},\quad ph=\frac{f_1-f_2}{2}=\frac{x_1-x_2}{2}=\frac{p}{2}.$$

因为 p 的平方是对称式，所以它也应当能够用 a, b 表示。实际上，$p^2=(x_1-x_2)^2=a^2-4b$. 因此

$$x_1=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

这就是所熟知的二次方程的根的公式。

Lagrange 用同样的方法說明三次、四次方程的解法，但对五次方程的解法杳无結果。一般五次方程的"代数的解法"为不可能的事实是在 1826 年由 Abel 所証明。象上面那样，对于以根作变数的多項式或表示为其商的有理式研究施行"根的置換"后所引起的結果，自 Lagrange 时代起已經流行，Abel "不可能的証明"也是根据这方法(参照高木貞治：代数学讲义)。把它作为一般化的理論体系的是 Galois. 在这里不能詳細介紹 Galois 的理論 (参照正田，淺野：代数学 I)，但引入它的基础 (key-word) 置換群的概念来描述它的輪廓。

把 n 作为自然数，n 个东西——它用数字 $1,2,\cdots,n$ 表示——的集合 S 的置換(即自 S 到 S 上的全单射)全体的集合用 $\mathfrak{S}(S)=\mathfrak{S}$ 表示。$\mathfrak{S}$ 的子集合 $\mathfrak{G}$ 具有下面性质 (i), (ii), (iii) 时，$\mathfrak{G}$ 叫做 S 的**置換群**。

(i) $\mathfrak{G}\ni\varepsilon$ (S 的恒等映射)。

(ii) $\mathfrak{G}\ni\pi\Rightarrow\mathfrak{G}\ni\pi^{-1}$.

(iii) $\mathfrak{G}\ni\pi_1,\ \pi_2\Rightarrow\mathfrak{G}\ni\pi_1\circ\pi_2$.

例 13　假定 $\mathfrak{G}$ 不是空集，由性质(ii)，(iii)能够导出(i)。

[解]　假定 $\pi\in\mathfrak{G}$，由(ii)得 $\pi^{-1}\in\mathfrak{G}$。因此由(iii)得 $\mathfrak{G}\ni\pi\circ\pi^{-1}=\varepsilon$。

例 14　$\mathfrak{S}$ 自身及只由恒等置换 ε 形成的集合 $\{\varepsilon\}$ 都是置换群。又在命題 2 之前定义的 $\mathfrak{S}_1$ 是置换群。关于一般的置换群 $\mathfrak{G}$ 总是 $\mathfrak{S}\supset\mathfrak{G}\supset\{\varepsilon\}$。$\mathfrak{S}$ 叫做 S 的**对称群**，$\{\varepsilon\}$ 叫做**恒等群**。$\mathfrak{S}_1$ 是不使 n 个变数的两值多項式变动的置换形成的群。假如“不使两值多項式变动”用“不使交代式或最簡交代式变动”来代替(由命题 5)，那末 $\mathfrak{S}_1$ 就叫做 S 的**交代群**。

例 15　置换作为对换的积表示时，“因子”对换的个数是偶数时，这样的置换叫做**偶置换**，是奇数时这样的置换叫做**奇置换**(这里奇偶性不論“因子分解”的方法如何总是一定的，因此这定义与 62 頁的定义一致)。交代群是由偶置换的全体构成的。

[解]　n 个变数的最簡交代式 p，显然对偶置换不变，而对奇置换变为 $-p$❶。假定 $\pi\in\mathfrak{S}$，因为 $\pi(p)$ 为 p 或 $-p$ 两者必居其一，所以 π 的奇偶是一定的。因为对换都属于 $\mathfrak{S}_2$，由例 9，$\mathfrak{S}_1$ 与偶置换的全体一致。

一般，假如給定 n 个变数的多項式 f 时，那末不使 f 变动的这样置换的集合显然成为置换群。多項式或有理式的集合 $\{f, g, \cdots\}$ 已給定时，使 f，g，$\cdots$ 都不变动的置换的集合也显然成为置换群。反之，对于給定的某置换群，可以来考虑由它不变动的多項式或有理式的集合。

Galois 的思想如下。

解以 x_1，$\cdots$，x_n 为根的 n 次方程

---

❶　$$p=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)=(x_{n-1}-x_n)$$
$$\cdot(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdot(x_1-x_n)(x_1-x_{n-1})\cdots(x_1-x_2),$$
可以写成
$$p=(x_k-x_l)\prod(x_i-x_k)(x_i-x_l)F,\quad i\neq k,l$$
这里 F 不含有 x_k 及 x_l。现在假設在 p 上施行对换 $(x_k x_l)$，因为 F 及 $(x_i-x_k)(x_i-x_l)$ 都不变而 (x_k-x_l) 变了符号，所以 p 就换成 $-p$ 了。这就是說在 p 上施行一个对换，p 就变了符号，因此假如用偶数个对换在 p 上継續施行，結果仍然是 p，假如用奇数个对换在 p 上継續施行，結果就是 $-p$。——譯者注

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad (21.7)$$

不外是用系数 $a_1, \cdots, a_n$ 表出根 $x_1, \cdots, x_n$. 但 $a_1, \cdots, a_n$ 除符号外与 $x_1, \cdots, x_n$ 的基本对称式(21.6)一致。"表出"根时,在所謂代数的解法中，所用的是加减乘除的四則运算与开方。因为四則运算是代数学中最基本的算法,所以便于把"四則运算能够如常施行的范圍"看成为一个东西——这样就产生了"体的概念"。自复数体 $\boldsymbol{C}$ 出发，解(21.7)的問題归結于自含 $\boldsymbol{C}$ 及 $a_1, \cdots, a_n$ (或 $\boldsymbol{C}$ 及 $x_1, \cdots, x_n$ 的基本对称式(21.6)) 的体 K_0 出发来求出——根据某些方法——含 $\boldsymbol{C}$ 及 $x_1, \cdots, x_n$ 的体 K 的間題。因为 K_0 中元都是 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称式(多項式或有理式)，所以对于对称群 $\mathfrak{S}$ 不变。由此用某个"代数方法"求出"n 值多項式" $f(x_1, \cdots, x_n)=x_i$ 即可。 Galois 的基本思想是对于自 K_0 到达 K 的"代数方法"的阶段,有 K 的子体列

$$K_0\subset K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_r=K$$

与之对应。而对于这,又有置换群列

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{G}_0\supset\mathfrak{G}_1\supset\mathfrak{G}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{G}_r=\{\varepsilon\}$$

与之对应，这时 K_i 正好是对于 $\mathfrak{G}_i$ 不变的有理式的集合。根据这个思想，方程的"代数解法"的問題归結到对称群的构造的問題，Abel 定理乃作为其一般理論之极特殊情况导出。

Galois 理論的說明不得不止于此,在这里所用的"使某些东西——在上面是多項式或有理式—— 不变的置換群"的概念是重要的。但是只考虑置換群实嫌过窄,因此有必要来考虑更一般的"变換群"。

置換定义为自有限集合 S 到它自身上的全单射。一般任意集合 S(也叫做"空間",不是有限也可)到它自身上的全单射叫做 S 的**正則变換**。S 的正則变換全体的集合用 $\mathfrak{S}(S)$ 表示。S 的两个变換 $\pi_1:S\to S$, $\pi_2:S\to S$ 能够按照 §6 的意义結合,它的結果 $\pi_1\circ\pi_2$

或 $\pi_2\circ\pi_1$ 又是 S 的变换。特别，假如 $\pi_1, \pi_2\in\mathfrak{S}(S)$，显然 $\pi_1\circ\pi_2$, $\pi_2\circ\pi_1\in\mathfrak{S}(S)$. $\mathfrak{S}(S)$ 的子集合 $\mathfrak{G}$ 满足与上面 (i)，(ii)，(iii) 同样的条件时，$\mathfrak{G}$ 叫做**变换群**。置换及置换群不过是当 S 为有限时，正則变换及变换群的特例。

例 16　$\mathfrak{S}(S)$ 全体及 $\{\varepsilon\}$ (ε 是 S 的恒等映射)都是变换群。在一般情况，$\mathfrak{S}(S)$，$\{\varepsilon\}$ 也分别叫做 S 的对称群，恒等群。

例 17　假定 $S=\boldsymbol{R}$ (实数体)，$\pi\in\mathfrak{S}(\boldsymbol{R})$，对于 $\boldsymbol{R}$ 中任意两元 x, y，如果 $\pi(x)-\pi(y)=x-y$，那就有 $\boldsymbol{R}$ 中常数 $a\in\boldsymbol{R}$ 使 $\pi(x)=x+a$. 这 π 假定用 π_a 表示，那末 $\pi_a\circ\pi_b=\pi_{a+b}=\pi_b\circ\pi_a$, $\pi_a^{-1}=\pi_{-a}$. 于是 $\{\pi_a;\ a\in\boldsymbol{R}\}$ 成为 $\boldsymbol{R}$ 的变换群。它叫做 $\boldsymbol{R}$ 的**平行移动群**。

［解］　命 $\pi(0)=a$，那末 $\pi(x)-a=x$. 所以 $\pi(x)=x+a$.

上例 $\boldsymbol{R}$ 的平行移动群是“不使两元之差变动的 $\boldsymbol{R}$ 的变换群”。不变我們现实空間中一点 O (即不使 O 变动) 的变换全体成为繞 O 的**旋轉群**，不变两点間距离的变换全体成为空間的运动群。一般，不变 S 的子集合的某性质的变换全体的集合成为 S 的一个变换群。

反之，設已給定空間 S 的一个变换群 $\mathfrak{G}$，对于 S 的两个子集合 A, A'，假如 $\mathfrak{G}$ 中存在元 π 使 $\pi(A)=A'$，那末 A, A' 叫做关于 $\mathfrak{G}$ **相合**，写成 $A\equiv A'(\mathfrak{G})$. 这样定义的相合关系，显然是等价关系(§4)。又“相合集合的共通性质”能够看成为“对于 $\mathfrak{G}$ 不变的性质”。Klein 根据这思想把几何来分类 (Erlanger Programm, 1872). 譬如 Euclid 几何学是研究对于运动群不变的图形的性质，非 Euclid 几何学是研究对于叫做“非 Euclid 运动群”的变换群不变的图形的性质等等，关于此，在这里不能詳述。但它也可以根据与 Galois 理論同样的思想来理解。

例 18　在空間內的正三角形与它自身重合的运动成为与 $\mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$ 同构的变换群。

［解］　由这样的一个运动 π，正三角形的三頂点 1, 2, 3 分别与頂点 α,

β, γ 重合时，对于 x 使 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$ 对应卽可。

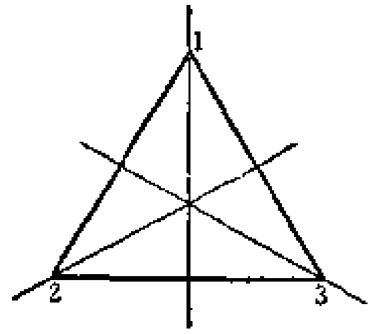
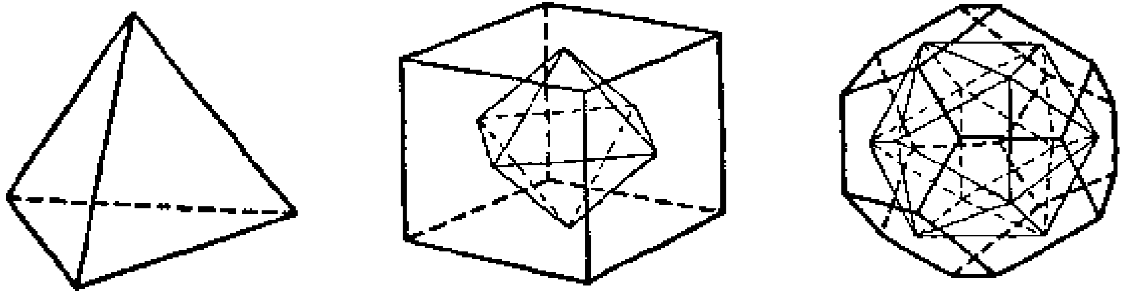


图 21.2

注意 一般在空間内的图形——結晶，花紋等——重合于它自身的运动成为空間的变换群。这变换群可以看成为这图形对称性的表示。

特别，图形是正多面体时，把它重合于它自身的运动的群叫做**多面体群**。因为正多面体有正四面体，正六面体（=立方体），正八面体，正十二面体，正二十面体 5 种，所以应該有 5 种多面体群。但連結正六面体各面的中心时，卽得正八面体，連結正十二面体各面的中心时，卽得正二十面体，所以正六面体与正八面体，正十二面


图 21.3

体与正二十面体，其重合于它自身的群分别同构。因此多面体群有正四面体群，正八面体群，正二十面体群 3 种。它們是分别与四次交代群，四次对称群，五次交代群同构的❶。（关于同构的詳細定义請参照下节。）

§22 群

作为代数系的群可以用可换群的公理 A°1～5（§3），而只除去其中的交换律 A°2 来定义。为慎重起見，将它重写一下，那就是

A°1 假定 G 是非空集合，对于 $x, y \in G$，給定了使 G 中元 $x \circ y$ 唯一对应的算法 $\circ$。

A°3　　　$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$（結合律）。

A°4 对于 G 中任意元 x，G 中存在满足 $x \circ e = e \circ x = x$ 这样的

❶ 参閱附录"有限旋轉群"。——譯注者

一元 e (e 叫做 G 的**单位元**)。

A°5 对于 $x\in G$，存在满足 $x'\circ x=x\circ x'=e$ 这样的 $x'\in G$ (x' 叫做 x 的**逆元**)。

这时 G 叫做关于算法 $\circ$ **成群**。变换群 (把映射的複合作为算法 $\circ$——因为映射的複合服从結合律——) 一定是群。又可换群当然是群。为了簡化算法的記法，代替上面的 $x\circ y$ 多写成 xy——积的形式。今后若不預先声明，群的算法都表为这种形状。

用这种記法时，群 G 的基本算法是"乘法"与"作逆元的算法"。对于 G 的元 a 及两个子集合 X，Y，命

$$aX=\{ax;\ x\in X\},\quad Xa=\{xa;\ x\in X\},$$

$$XY=\{xy;\ x\in X,\ y\in Y\},\quad X^{-1}=\{x^{-1},\ x\in X\}.$$

假如 $H(\neq\emptyset)\subset G$ 滿足 $HH^{-1}\subset H$，那末 H 叫做"关于群算法是(封)閉的"。这时 H 关于与 G 同样的算法显然成群。它叫做 G 的**子群**。

例 1 (i) $HH^{-1}\subset H\neq\emptyset\Rightarrow HH^{-1}=H$.

(ii) $HH^{-1}\subset H\Leftrightarrow HH\subset H,\ H^{-1}\subset H$.

[解] (i) 假定 $x_0\in H$，那末 $e=x_0x_0^{-1}\in H$. 如果 x 是 H 中任意元，那末 $x=xe=xe^{-1}\in HH^{-1}$. 所以 $H\subset HH^{-1}$.

(ii) $H=\emptyset$ 时是明显的。考虑 $H\neq\emptyset$ 的情况。假如 $HH^{-1}\subset H$，由 (i) $e\in H$，所以 $H^{-1}=eH^{-1}\subset HH^{-1}\subset H$. 如果 $xy(x\in H,\ y\in H)$ 是 HH 中任意元，由 $y\in H$，得 $y^{-1}\in H$，所以 $xy=x(y^{-1})^{-1}\in HH^{-1}\subset H$. 于是 $HH\subset H$. 反之，假如 $HH\subset H$，$H^{-1}\subset H$，那末 $HH^{-1}\subset HH\subset H$.

注意 在 §3 曾就一般代数系的子系。同态映射，同构映射等作了闡述。子群不外是作为代数系的群的子系。关于以下所述的群的生成，同态，同构，直积等，也都适合于作为代数系一般概念的群。

假如群 G 有子集合 M，那末在 G 中唯一存在含 M 的最小子群，此可与 §3 命題 2 同样証明。它叫做由 M **生成的子群**，用 $[M]$ 表示。

假如有两个群 G_1, G_2 与自 G_1 到 G_2 上的映射 $f: G_1 \to G_2$，如果 f 保存 G_1 的基本算法，即如果 $f(xy^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1}$，那末 f 叫做自 G_1 到 G_2 的**同态映射**。当自 G_1 到 G_2 上的同态映射存在时，G_2 叫做同态于 G_1。同态映射是全单射的叫做**同构映射**。自 G_1 到 G_2 的同构映射存在时，G_1 叫做同构于 G_2，記为 $G_1 \cong G_2$。同构关系显然是等价关系(同构这名詞在§21，例18也用过)。

假如有 k 个群 $H_1, \cdots, H_k$，它們的群的**直积** $G = H_1 \otimes \cdots \otimes H_k = \prod_{i=1}^{k} \otimes H_i$ (与向量空間直积的情况一样)定义如下：

G 中元是集合 H_i 的直积 $H_1 \times \cdots \times H_k$ 中元 $(x_1, \cdots, x_k)$ $(x_i \in H_i)$，其中两元 $x = (x_1, \cdots, x_k)$，$y = (y_1, \cdots, y_k)$ 之間的基本算法假定是

$$xy = (x_1y_1, \cdots, x_ky_k), \quad x^{-1} = (x_1^{-1}, \cdots, x_k^{-1}).$$

那末 G 显然成为群。e_i 是 H_i 的单位元时，

$$e = (e_1, \cdots, e_k)$$

是 G 的单位元。这时 $(e_1, \cdots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \cdots, e_k)$ $(x_i \in H_i)$ 形状的元形成与 H_i 同构的 G 的子群。假如把它看成 H_i，它的元仍旧用 x_i 表示，那末 G 中任意元能够唯一地表为 $x_1x_2\cdots x_k$ $(x_i \in H_i)$ 的形状。这时 $i \neq j \Rightarrow x_ix_j = x_jx_i$。反之，假如 H_i $(i = 1, \cdots, k)$ 是 G 的子群，当 $i \neq j$ 时 H_i 中元与 H_j 中元可换，G 中任意元能够唯一地写成 $x_1x_2\cdots x_k$ $(x_i \in H_i)$ 的形状，那末 G 成为(同构于) H_i 的直积。群的基本算法不用积的形状而写成和的形状时，直积就用直和这名詞来代替，$H_1 \otimes \cdots \otimes H_k$ 的記法也就用 $H_1 \oplus \cdots \oplus H_k$。

我們已經知道变换群与可换群，虽然群的例子已不少，但不妨再示下面数例。

例 2 当 V 是体 K 上向量空間时，V 的正则綫性变换(即自 V 到 V 自身的綫性映射是全单射的)全体的集合形成把映射的słożenie作为算法的群，叫做 V 的**一般綫性变换群**，用 $GL(V)$ 表示(GL 是 General Linear 之略)。

例 3　当 $\dim V=n$ 时，假如取 V 的坐标 φ，那末 $GL(V)$ 中元能够用体 K 上 n 級正則矩陣表示。K 上 n 級正則矩陣全体的集合形成关于矩陣乘法的群。它用 $GL(n, K)$ 表示。显然 $GL(V)\cong GL(n, K)$。

例 4　$GL(V)$ 是由作为代数系的 V 的自同构的全体形成的群。不論是如何的代数系，它的自同构的全体也形成把映射的糬合作为算法的群。它叫做代数系的**自同构群**。

例 5　假定 V 是 n 維 Euclid 空間，那末 V 的直交变換的全体形成 $GL(V)$ 的子群，叫做 V 的**直交变換群**。n 級直交矩陣的全体形成与它同构的群，它用 $O(n, \boldsymbol{R})$ 表示。$O(n, \boldsymbol{R})$ 是 $GL(n, \boldsymbol{R})$ 的子群。特征直交矩陣的全体又形成 $O(n, \boldsymbol{R})$ 的子群，它用 $O^+(n, \boldsymbol{R})$ 表示。

例 6　当 A 是体 K 上 n 級对称矩陣时，$GL(n, K)$ 中使 $TA{}^tT=A$ 这样(使 A 不变的)的元 T 形成 $GL(n, K)$ 的子群。$K=\boldsymbol{R}$, $A=E$ 时，这子群不外是 $O(n, \boldsymbol{R})$、在 $K=\boldsymbol{R}$, $n=4$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ 时，这子群叫做 **Lorentz 群**。

例 7　与例 5 同样能够定义 n 阶**酉变換群**与表示它的 n 級酉矩陣群 $U(n, \boldsymbol{C})$。

例 8　体 K 中元关于加法成为可换群，$K-\{0\}=K^*$ 关于乘法成为可换群。这由体的公理(C, § 3)自明。这些群叫做 K 的**加法群，乘法群**。它仍旧用 K, K^* 表示。特别，$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^*$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}^*$ 分别叫做实数的加法群，乘法群，复数的加法群，乘法群。这时 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$。正实数全体关于乘法也成为可换群，它用 $\boldsymbol{R}^+$ 表示，于是 $\boldsymbol{R}^+$ 是 $\boldsymbol{R}^*$ 的子群。加法群 $\boldsymbol{R}$ 与乘法群 $\boldsymbol{R}^+$ 同构。假如 $y=\exp x=f(x)$，那末 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^+$ 給出自 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}^+$ 的同构映射，$x=\log y=g(y)$ 給出它的逆映射 $g:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}$。又对于 $z\in\boldsymbol{R}^*$ 或 $z\in\boldsymbol{C}^*$, $z\to|z|$，給出自 $\boldsymbol{R}^*$ 或 $\boldsymbol{C}^*$ 到 $\boldsymbol{R}^+$ 的同态映射。

例 9　由两个实数 1, -1 构成的集合 $\{1, -1\}$，关于乘法成群，是 $\boldsymbol{R}^*$ 的子群，它与二阶对称群 $\mathfrak{S}(\{1, 2\})$ 同构。$\boldsymbol{R}^*\ni z\to\frac{z}{|z|}$ 給出自 $\boldsymbol{R}^*$ 到 $\{1, -1\}$ 的同态映射。又 $\boldsymbol{R}^*$ 能够用 $\boldsymbol{R}^+$ 与 -1 生成。再，絕对値是 1 的复数的集合，作成 $\boldsymbol{C}^*$ 的子群。用 $\boldsymbol{U}$ 表示。$\boldsymbol{U}$ 与 $O^+(2, \boldsymbol{R})$ 同构。$\boldsymbol{C}^*\ni z\to\frac{z}{|z|}\in\boldsymbol{U}$ 給出自 $\boldsymbol{C}^*$ 到 $\boldsymbol{U}$ 的同态映射。$\boldsymbol{C}^*$ 能够用 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{R}^+$ 生成。

例 10　有理整数 $\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ 关于加法成群。它用

$\boldsymbol{Z}$ 表示。$\boldsymbol{Z}$ 是加法群 $\boldsymbol{R}$ 的子群。假定 $m\in\boldsymbol{Z}$, $m\neq 0$, 对于 x, $x'\in\boldsymbol{Z}$, $x-x'$ 是 m 的倍数时，写成 $x\equiv x'(\mathrm{mod}\, m)$，叫做 x, x' 对于 $\mathrm{mod}\, m$ **相合**，这相合关系显然是等价关系。因此 $x\equiv x'(\mathrm{mod}\, m)$ 时，x, x' 叫做关于 $\mathrm{mod}\, m$ 属于相同的**剩余类**，写成 $(x)_m=(x')_m$。当 m 固定时，也可省略 $(x)_m$ 的 m 及相合式的 $(\mathrm{mod}\, m)$。显然 $x\equiv x'$, $y\equiv y'\Rightarrow x+y\equiv x'+y'$，所以把 $(x+y)$ 命名为 (x) 与 (y) 的和是可以的。对于这种"加法"，关于 $\mathrm{mod}\, m$ 的剩余类 (0)，(1)，(2)，…，$(m-1)$ 形成可换群。这群用 $\boldsymbol{Z}_m$ 表示。$\boldsymbol{Z}_m$ 与 $\mathfrak{S}(\{1,2,\cdots,m\})$ 中用循环置换$(1,2,\cdots,m)$生成的子群同构。与 $\boldsymbol{Z}_m$ 同构的群，叫做 m **阶循环群**。与 $\boldsymbol{Z}$ 同构的群，也叫做无限阶循环群。用有限个元生成的可换群，是若干个无限阶或有限阶的循环群的直积(可换群的基本定理)❶。

上面給出群的很多具体例子。由有限集合形成的群叫做**有限群**。象它們之中的：恒等群，例 9 的 $\{1, -1\}$，例 10 的 $\boldsymbol{Z}_m$ 或 $\mathfrak{S}(\{1, 2, \cdots, m\})$及其的子群等，不是有限的($\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^*$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}^*$, $GL(n, \boldsymbol{R})$等)叫做**无限群**。有限群中元的个数叫做群的**阶**。在討論 $GL(n, \boldsymbol{R})$ 和它的子群时，引入它的拓扑而作为所謂**拓扑群**来討論，常較方便。但在这里已沒有机会深入到这方面了(請参閱本丛书中的"李群論")。

把例 10 的思想一般化，遂得到下述的定理，它虽簡单，但极重要。

定理 1 假定 G 是群，H 是它的子群，那末对于 x, $y\in G$，下面的六个条件是等价的：

(i) $xy^{-1}\in H$, (i') $yx^{-1}\in H$,

(ii) $Hx\ni y$, (ii') $Hy\ni x$,

(iii) $Hx=Hy$, (iii') $Hx\cap Hy\neq\emptyset$.

証明 (i)⇔(i')。假定 $xy^{-1}\in H$，那末 $yx^{-1}=(xy^{-1})^{-1}\in H$。反之是同样的。

---

❶ 参閱 E. 阿丁著"伽罗华理論"，II. 体論，I. 有限体。李荚譯，上海科学技术出版社。—— 譯者注

(i)⇔(ii′)。假定$xy^{-1}\in H$，那末$Hy\ni(xy^{-1})y=x$。反之，假定$Hy\ni x$，那末$xy^{-1}\in(Hy)y^{-1}=H$。

(i′)⇔(ii)。能够与上同样証明。

于是(i)，(i′)，(ii)，(ii′)等价。

(i)⇒(iii)。假定(i)成立，因为(ii)成立，所以能够写成$y=hx(h\in H)$。于是，如果$h'\in H$，那末$h'y=h'hx\in Hx$。所以$Hy\subset Hx$。又因为(ii′)也成立。同样，$Hx\subset Hy$。因此$Hx=Hy$。

(iii)⇒(iii′)。显然。

(iii′)⇒(i)。假定$z\in Hx\cap Hy$，那末，$z=h_1x=h_2y$ (h_1, $h_2\in H$)，所以$xy^{-1}=h_1^{-1}h_2\in H$。

由以上(iii)，(iii′)也与(i)等价。 (証毕)

G 的子集合 Hx 叫做 x 关于 mod H 的**右剩余类**。当定理 1 的六个条件中任一个（因此所有）成立时，写成 $x\equiv y$ (r-mod H)。这关系显然是等价关系。今于G的子集合$\{x_\alpha\}$，假定$\alpha\neq\alpha'$时即不得有$x_\alpha\equiv x_{\alpha'}$ (r-mod H)，并且对于G中任意元x有适当的α存在使$x\equiv x_\alpha$ (r-mod H)，那末G成为Hx_α作为集合的直和

$$G=\sum_\alpha Hx_\alpha, \tag{22.1}$$

它叫做G关于 mod H 的**右剩余系的分解**。与这完全同样，能够定义G关于 mod H 的**左剩余系的分解**

$$G=\sum_\beta y_\beta H. \tag{22.1′}$$

例 11 假定$G=\mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$，$H=\{(1), (1\ 2)\}$，那末

$G=H+H(1\ 3)+H(2\ 3)$，

这里 $H(1\ 3)=\{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$， $H(2\ 3)=\{(2\ 3), (1\ 2\ 3)\}$；

$G=H+(1\ 3)H+(2\ 3)H$，

这里 $(1\ 3)H=\{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$， $(2\ 3)H=\{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$。

特别，G 是阶为 g 的有限群时，假定 H 的阶是 h，$\{x_\alpha\}$ 中元的个数是 k，由(22.1)得

$$g = hk.$$

假定 $\{y_\beta\}$ 中元的个数是 k'，由(22.1')得

$$g = hk'.$$

所以 $k=k'=g/h$. 这 k 叫做 H 关于 G 的**指数**，記为 $(G:H)$(因而单位群若用 1 表示，则群的阶是$(G:1)$)。由上式得

定理 2 (Lagrange) 有限群 G 的子群的阶是 G 的阶的約数。

由这定理更导出下面的事实。

假定 x 是有限群 G 中元，G 中用 x 生成的子群 H 显然是具有 $\{e, x, x^2, \cdots, x^{m-1}\}$形状的循环群。这时 $x^m=e$. H 的阶 m 也叫做 x 的阶。由定理 2, x 的阶 m 是 G 的阶 g 的約数。于是 $x^g=x^{m(g/m)}=e$. 因此得下面的定理 2 的系。

定理 2 的系 假定 x 是有限群 G 中任意元，g 是 G 的阶，那末 $x^g=e$ (单位元)。 (系毕)

H 是 G 的子群时，x 关于 $\bmod H$ 的左剩余类 xH 与右剩余类 Hx 不一定一致。假如对于任意 $x\in G$, 总是

$$xH=Hx, \text{ 即 } xHx^{-1}=H$$

时，那末，H 叫做 G 的**正規子群**。假如 H 是 G 的正規子群，那末对于任意 $x, y\in G$,

$$Hx\cdot Hy^{-1}=H\cdot x\cdot Hy^{-1}=H\cdot Hx\cdot y^{-1}=Hxy^{-1}.$$

于是，对于 $x\in G$, 使与 x 关于 $\bmod H$ 的剩余类(当 H 是正規子群时，沒有必要区别剩余类的左右) Hx 对应，就得到同态于 G 的群，这群叫做 G 对于正規子群 H 的**商群**，用 G/H 表示。又对于 $x\in G$, 使与 $Hx\in G/H$ 对应的映射，叫做自 G 到 G/H 的**自然映射**。这事实的逆，就是下面的重要定理。

定理 3 假定 G' 是同态于 G 的群，f 是自 G 到 G' 上的同态映射。这时 G' 的单位元如果是 e', 那末 $H=\{x; f(x)=e'\}$ 是 G 的正規子群，$G'\cong G/H$(**同态定理**)。

証明 (i) 首先示 H 成为 G 的子群。假定 $x, y \in H$，那末 $f(x)=f(y)=e'$. 因为 f 是同态映射，所以 $f(xy^{-1})=f(x)(f(y))^{-1}=e'\cdot e'^{-1}=e'$. 于是 $xy^{-1}\in H$.

(ii) H 成为 G 的正规子群。假定 $x\in H$，z 是 G 中任意元，那末 $f(zxz^{-1})=f(z)f(x)(f(z))^{-1}=f(z)\cdot e'(f(z))^{-1}=f(z)(f(z))^{-1}=e'$. 所以 $zxz^{-1}\in H$，即 $zHz^{-1}\subset H$. 由这即得 $H\subset z^{-1}Hz$. 假如用 z^{-1} 代替 z，那末 $zHz^{-1}\supset H$，所以 $zHz^{-1}=H$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \varphi\downarrow & \swarrow\psi & \\ G/H & & \end{array}$$

(iii) $G'\cong G/H$. 假定自 G 到 G/H 的自然映射是 φ. x' 是 G' 中任意元，因为 f 是自 G 到 G' 上的同态映射，所以在 G 中有适当的元 x 存在使 $f(x)=x'$. 这样的 x 一般不是唯一确定的，但是，如果 $f(x)=f(x_1)=x'$，显然 $f(xx_1^{-1})=e'$，于是 $xx_1^{-1}\in H$. 所以 $\varphi(x)=\varphi(x_1)$ 由 x' 唯一确定。把这 $\varphi(x)$ 对应于 x' 的映射設为 ψ，那末 ψ 显然給出自 G' 到 G/H 的同构映射。 (証毕)

定理 3 中的 H. 叫做同态映射 f 的**核** (kernel)，写成 $\mathrm{Ker}\, f$ (参照 44 頁)。

例 12 对于可換群，所有的子群是正規子群。譬如 $G=\mathbf{Z}$，如果 H 是 $\mathbf{Z}$ 中用 $m\in\mathbf{Z}\,(m\neq 0)$ 生成的子群(它用 $m\mathbf{Z}$ 表示)，那末 $G/H=\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_m$ (参照例 10)。

例 13 在 $G=\mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$ 中，$H=\{(1), (1\ 2)\}$ 不是正規子群(参照例 11)。$\{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ 是正規子群，而 G/H 成为阶为 2 的循环群。

例 14 指数是 2 的子群总是正規子群。特别，交代群是对称群的正規子群。

[解] 假定 H 是 G 的指数是 2 的子群。如果 x 是 G 中不属于 H 的任意元，因为 Hx 是关于 mod H 异于 H 的右剩余类，所以 $G=H+Hx$，于是作为集合 $Hx=G-H$. 根据完全同样的理由，xH 也是 $G-H$，所以 $Hx=xH$. 又假如 $x\in H$，因为 H 是子群，所以 $xHx^{-1}=H$. 于是 H 做成 G 的正規子群。

如前所述，群所关連的各种事实出现于数学中各部門，它們"表現"为何种形状完全根据計算的便利来处理。在最广意义下，自

群 G 到 G' 的(到 G' 中的)同态映射，叫做 G 在 G' 的**表現**，但是希望 G' 是比 G "具体的"并且 G' 的群算法是属于"便于計算"形式的。通常单說 G 群的表現时，是假定取 $GL(n, \boldsymbol{C})$ $(n=1, 2, \cdots)$ 作为 G'. $GL(n, \boldsymbol{C})$ 是复数体 $\boldsymbol{C}$ 上 n 維向量空間 V 的自同构群，它們的元用 n 級正則矩陣表示。因为群算法用矩陣算法表示，所以在它的理論中当然能够引用第 1 章的諸結果。又在与群的联系中，上面的同态定理（定理 3）很重要。关于有限群的表現論将在第 3 章詳述。

§23 Boole 代 数

与 §2 同样，对于一个集合 I 的子集 $A, B, C, \cdots$，假如 A, B 的和集用 $A\cup B$ 表示，A, B 的交集用 $A\cap B$ 表示，那末下面各个法則显然成立：

(i) **冪等律**　$A\cup A=A,\ A\cap A=A.$

(ii) **可换律**　$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A.$

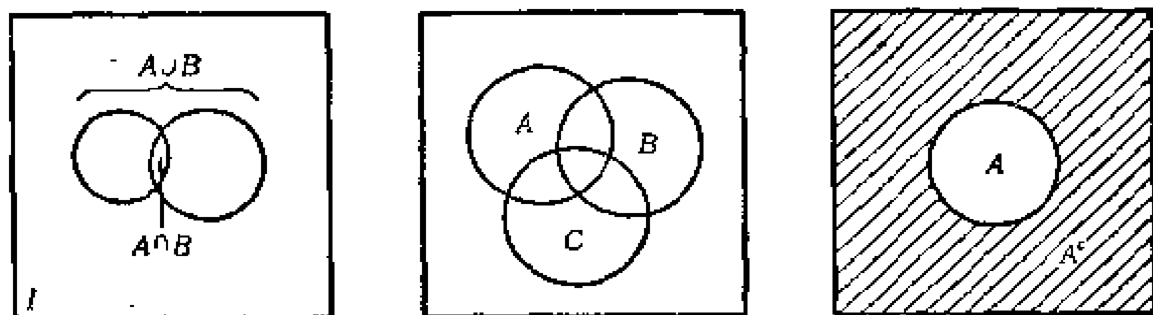
(iii) **結合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$

(iv) **吸收律**　$A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A.$

(v) **分配律**　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$



$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

图 23.1

关于 I, $\emptyset$, 特别有

(vi) $I\cup A=I$, $\emptyset\cup A=A$; $I\cap A=A$, $\emptyset\cap A=\emptyset$.

又假如 A 的(对于 I)补集合 $I-A$ 写成 A^c, 那末

(vii) $A\cup A^c=I$, $A\cap A^c=\emptyset$.

(viii) **De Morgan 法则** $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

(ix) **对合律** $A^{cc}=A$.

"Boole 代数"就是这种"集合族"的概念的一般化,它是作为下面这样的代数系而定义的。

Boole 代数 L 是元 x, y, z, $\cdots$ 的集合，在 L 中任意两元 x, y 之間定义两种算法 $x\cup y$, $x\cap y$, 这算法服从(i)幂等律，(ii)可换律，(iii)結合律，(iv)吸收律，(v)分配律諸法則。又 L 有两个特定的元 1, 0, 使得

(vi) $1\cup x=1$, $0\cup x=x$; $1\cap x=x$, $0\cap x=0$

成立。对于 L 的任意元 x, 存在满足

(vii) $x\cup x^c=1$, $x\cap x^c=0$

的 $x^c\in L$. $x\cup y$ 叫做 x, y 的**結**，$x\cap y$ 叫做 x, y 的**交**。1, 0 分别叫做 L 的**单位元**、**零元**，x^c 叫做 x 的**补元**。

以下,本节中 L 表示 Boole 代数。

命題 1 x 的补元唯一确定，即如果 $x\cup y=1$, $x\cap y=0$, $x\cup z=1$, $x\cap z=0$, 那末 $y=z$.

証明 $y=1\cap y$ (由 vi)

$=(x\cup z)\cap y=(x\cap y)\cup(z\cap y)$ (由 v)

$=0\cup(z\cap y)=z\cap y=y\cap z$. (由 vi, ii)

完全同样，$z=y\cap z$. 所以 $y=z$.

命題 2 在 L, (viii) De Morgan 法則 $(x\cup y)^c=x^c\cap y^c$, $(x\cap y)^c=x^c\cup y^c$ 及 (ix) 对合律 $(x^c)^c=x$ 成立。

証明 命$x^c\cap y^c=z$,假如能够証明$x\cup y\cup z=1$,$(x\cup y)\cap z=0$,那末由命題1,$z=(x\cup y)^c$。但这时,$x\cup y\cup z=x\cup y\cup(x^c\cap y^c)$ $=x\cup((y\cup x^c)\cap 1)=x\cup(y\cup x^c)=(x\cup x^c)\cup y=1\cup y=1$,$(x\cup y)\cap z=(x\cup y)\cap(x^c\cap y^c)=((x\cup y)\cap x^c)\cap((x\cup y)\cap y^c)$ $=(0\cup(y\cap x^c))\cap((x\cap y^c)\cup 0)=(y\cap x^c)\cap(x\cap y^c)=(x\cap x^c)$ $\cap(y\cap y^c)=0\cap 0=0$。同样$(x\cap y)^c=x^c\cup y^c$也成立。

(ix) 由命題1自明。

命題3 在L,$x=x\cup y\Leftrightarrow y=x\cap y$。

这时,假如写成$x\geqslant y$(或$y\leqslant x$),那末

(a) $x\geqslant x$,

(b) $x\geqslant y,\ y\geqslant x\Rightarrow x=y$,

(c) $x\geqslant y,\ y\geqslant z\Rightarrow x\geqslant z$

成立。又$x\cup y$,$x\cap y$的特征如下:

(d) $x\cup y\geqslant x,\ x\cup y\geqslant y$,

(e) $z\geqslant x,\ z\geqslant y\Rightarrow z\geqslant x\cup y$,

(d′) $x\cap y\leqslant x,\ x\cap y\leqslant y$,

(e′) $z\leqslant x,\ z\leqslant y\Rightarrow z\leqslant x\cap y$。

証明 假定$x=x\cup y$,用吸收律,$x\cap y=(x\cup y)\cap y=y$。反之同样成立。(a)~(e′)由下面諸式是显明的。

(a) $x=x\cup x$ (由i)。

(b) $x=x\cup y=y\cup x=y$ (由ii)。

(c) $x=x\cup y=x\cup(y\cup z)=(x\cup y)\cup z=x\cup z$ (由iii)。

(d) $x\cup y=(x\cup x)\cup y=x\cup(x\cup y)=x\cup(y\cup x)=(x\cup y)\cup x$ (由i, ii,iii)。$x\cup y\geqslant y$也是同样。

(e) $z=z\cup y=(z\cup x)\cup y=z\cup(x\cup y)$ (由iii)。

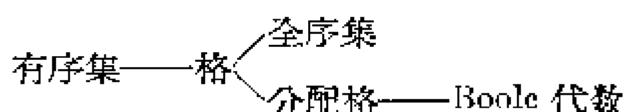
(d′) $x\cap y=(x\cap x)\cap y=x\cap(x\cap y)$ (由i, iii),$x\cap y\leqslant y$也同样(由i, ii, iii)。

(e′) $z=x\cap z=x\cap(y\cap z)=(x\cap y)\cap z$ (由 iii)。

系 关于 L 中任意元 x，$1\geqslant x$，$x\geqslant 0$。

注意1 命题3只用 Boole 代数公理中 i, ii, iii, iv 就能証明。只采用 Boole 代数公理中 i, ii, iii, iv 定义的代数系，一般叫做**格**，采用 i, ii, iii, iv, v 所得到的代数系，叫做**分配格**。

在某集合 S 中两元 x, y 之間，假定有用 $\leqslant$ 表示的关系存在并且对于它，命題3中的 (a), (b), (c) 又成立时，那末 S 叫做由 $\leqslant$ 給出顺序的**有序集**。在有序集 S 中，假如两元 x, y 之間 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$ 必定有一成立时，那末 S 叫做**全序集**。这些概念間广狭关系如下(左狹右广)



关于有序集与格的各自的理論，在这里都沒有机会深入。

注意2 算法 $\cup$，$\cap$ 叫做格算法，依照这些算法結合的象 $((x\cup y)\cap z)\cup(x\cap y)$ 这样的，叫做"变数"x,y,z 的**格多項式**。在格多項式中把記号 $\cup$，$\cap$ 互换又能够得到一个格多項式——在上例是 $((x\cap y)\cup z)\cap(x\cup y)$——它叫做对偶(dual)于原来格多項式的格多項式，如此的变形叫做**对偶变形**。格和分配格的公理都能够用格多項式的等式来表示。对于这样等式的两边施行对偶变形，也叫做对于这等式施行对偶变形，所得到的等式是对偶于原来的等式。格和分配格的公理假如含一个等式，也就必定含对偶于它的等式。根据这事实，就說这公理是**自己对偶的**。于是假如自格和分配格的公理导出某个等式，那末对偶于它的等式也必定能够导出。这事实叫做**对偶原理**。在 Boole 代数的公理中，假如把 $\cup$，$\cap$ 互換，同时又把 $1, 0$; x, x^c 互换，則在上述意义下成为"自己对偶"，并且对偶原理成立。根据这原理在定理的証明中，关于对偶的只要記述一方已足。

例1 由 $I=\{1,2\}$ 的子集形成的 Boole 代数，具有 I, $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $\emptyset$ 四个元，它的結，交，补元的表如后。

$\cup$	$\emptyset$	A	B	I
$\emptyset$	$\emptyset$	A	B	I
A	A	A	I	I
B	B	I	B	I
I	I	I	I	I

$X\cup Y$ 的表

$\cap$	$\emptyset$	A	B	I
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
A	$\emptyset$	A	$\emptyset$	A
B	$\emptyset$	$\emptyset$	B	B
I	$\emptyset$	A	B	I

$X\cap Y$ 的表

X	$\emptyset$	A	B	I
X^c	I	B	A	$\emptyset$

X^c 的表

一般,由 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集合形成的 Boole 代数 B_n 具有 2^n 个元，它的 $\cup, \cap, {}^c$ 的表容易作出。具有有限个元的 Boole 代数与一个 B_n 同构。

例 2 假定 $L=\{P, Q, R, \cdots\}$ 是命題的集合，解釋 $P\cup Q$ 为"P 或 Q"，$P\cap Q$ 为"P 并且 Q"，I 为"眞"，$\emptyset$ 为"伪"，P^c 为"非 P"，如果通常的論理学(Aristoteles 的論理学)成立，那末"命題算"能够用 Boole 代数表示。譬如 $P\cup P^c=I$ 意味着"P 或非 P 中一个是眞"。$P\geqslant Q$ $(\Leftrightarrow P=P\cup Q\Leftrightarrow Q=P\cap Q)$ 解釋为"假如 P 那末 Q"（在命題算中，对于它，象現在本文中使用的那样，可以用 $P\Rightarrow Q$ 的記法)。于是，$P\geqslant Q$, $Q\geqslant R\Rightarrow P\geqslant R$ 意味着**三段論法** $(P\Rightarrow Q, Q\Rightarrow R)\Rightarrow(P\Rightarrow R)$.

Boole 代数是由 George Boole 在 19 世紀中叶作为"論理代数"而引入的(The Mathematical Analysis of Logic, 1847; An Investigation into the Laws of Thought, 1854)，但現在它的理論已能够用到概率論和分析等諸方面（测度論等)，在应用上計算机的理論等中也被引用。这些在这里都不能深入了，下面只举簡单应用的一例。

例 3 就收听无綫电广播組 A, B, C 的情况进行調查，得到这样的报告：n 人中收听 A 組的 a 人，收听 B 組的 b 人，收听 C 組的 c 人，收听 A, B 两方的 d 人，收听 B, C 两方的 e 人，收听 C, A 两方的 f 人，今問收听 A, B, C 三方的有几人。

［解］ 假定收听 A, B, C 各个組人的集合仍旧用 A, B, C 表示，一般有限集合 M 中元的个数用 $|M|$ 表示。关于个数，显然

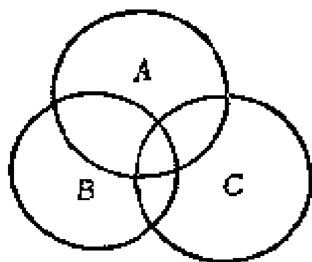


图 23.2

$$M=M_1\cup M_2,\ M_1\cap M_2=\emptyset\Rightarrow|M|=|M_1|+|M_2|$$

成立。与 § 2 同样，$M=M_1\cup M_2$, $M_1\cap M_2=\emptyset$ (M 是 M_1 与 M_2 的直和) 时，

写成 $M=M_1+M_2$，那末

$$|M_1+M_2|=|M_1|+|M_2|.$$

$M=M_1\cup M_2$，但 $M=M_1+M_2$ 不成立时，命 $M_1\cap M_2^c=M_1'$，$M_2\cap M_1^c=M_2'$，

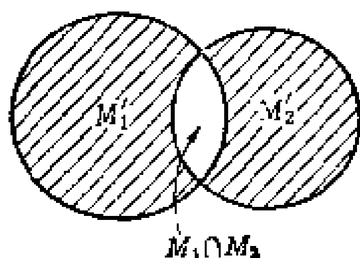


图　23.3

显然

$$M_1=M_1'+(M_1\cap M_2),\quad M_2=M_2'+(M_1\cap M_2),$$

$$M_1\cup M_2=M_1'+M_2'+(M_1\cap M_2).$$

于是

$$|M_1\cup M_2|=|M_1'|+|M_2'|+|M_1\cap M_2|$$
$$=|M_1|+|M_2|-|M_1\cap M_2|.$$

由这公式得

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|&=|A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|\\&=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|\\&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|\\&\quad-(|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|)\\&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|\\&\quad-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|.\end{aligned}$$

所以假如 $|A\cap B\cap C|=g$，那末

$$n=a+b+c-d-e-f+g.$$

由此式即能求得 g.

§24　有　限　体

本节的目标是后面的定理4（162页），在它的証明中必须引用初等整数論及代数学中如下的一些事实(i)～(ix)。

(i) **初等整数論的基本定理**　任意自然数 n 能够质因数分解为 $n=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$（$p_i$ 是质数，$e_i\geqslant 0$）. n' 是又一自然数，假如能够质因数分解为 $n'=p_1^{e_1'}\cdots p_r^{e_r'}$，那末 $e_i\geqslant e_i'$（$i=1,\cdots,r$）时而且限于这时，n 是 n' 的倍数（n 是 n' 的倍数，n' 是 n 的約数，用 $n'|n$ 来表示）。

又对于上面的 n,n'，它的最大公約数 (n,n') 用 $p_1^{\min(e_1,e_1')}\cdots p_r^{\min(e_r,e_r')}$（$\min(e_i,e_i')$ 表 e_i,e_i' 中小的一数）給出。n,n' 的最小公倍数用 $p_1^{\max(e_1,e_1')}\cdots p_r^{\max(e_r,e_r')}$（$\max(e_i,e_i')$ 表 e_i,e_i' 中大的一数）給出。

(ii) 假如 $(n, n')=1$，这时 n, n' 叫做**互质**，那末存在适合 $nx+n'x'=1$ 的 $x, x'\in \mathbf{Z}$。又其逆亦真。

(iii) 假定 K 是体，K 上变数 X 的多项式，即

$$f(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_kX^k,\ a_i\in K,\ i=1,\ \cdots,\ k \quad (24.1)$$

形状的式全体的集合成为 K 上代数(§7)，叫做 **K 上多项式环**，用 $K[x]$ 表示。于(24.1)，假如 $a_k\neq 0$，那末 $f(X)$ 叫做 k 次多项式或 $f(X)$ 的**次数是 k**。非 0 的“常数” a_0 的次数是 0，多项式 0 的次数不定义。假如 k 次多项式的集合用 $K^k[X]$ 表示，那末 $K[X]=\{0\}+K^0[X]+K'[X]+\cdots$（作为集合的直和），$\{0\}+K^0[X]+\cdots+K^k[X]$ 用 $K_k[X]$ 表示，$K_k[X]$ 中元，叫做**次数 k 以下的多项式**。次数 k 以下的多项式能够写成(24.1)形状。$K_k[X]$ 形成 K 上 k 維向量空間，$K[X]$ 形成 K 上无限維向量空間。

(iv) 当 $f(X)\in K_k[X]$ 时，对于 $\alpha\in K$，假如 $f(\alpha)=0$ 即 $f(X)=0$ 在 K 中有根 α，那就有适合 $f(X)=(X-\alpha)g(X)$ 的 $g(X)\in K_{k-1}[X]$。假如 $\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu$ 是 $f(X)=0$ 的 ν 个不同的根，那就有适合 $f(X)=(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_\nu)h(X)$ 这样的 $h(X)\in K_{k-1}[X]$ 存在。于是“k 次方程” $f(X)=0$ 的根的个数不大于 k。

(v) 关于 $K[X]$ 中元，有与上面关于自然数的(i)同样的事实成立：$K[X]$ 中元能够唯一地表为在 K 中“既約多項式”的积：$f(X)=(p_1(X))^{e_1}\cdots(p_r(X))^{e_r}$。又两个多项式 $f_1(X)$，$f_2(X)$ 假如互质，即假如它們的最大公約数 $(f_1(X), f_2(X))$ 是 1，那就有适合 $f_1(X)g_1(X)+f_2(X)g_2(X)=1$ 这样的 K 上多项式 $g_1(X), g_2(X)$。

(vi) 假如 L 是含体 K 的体，即 K 的**扩張体**，那末 L 成为 K 上向量空間。特别，L 是 K 上有限維向量空間时，它的維数叫做 L 在 K 的維数，用 $(L:K)$ 表示。

(vii) 对于 $K[X]$ 中元 $f(X)$，假如作 K 的适当扩張体 L，那末 $f(X)$ 在 L 能够分解为一次因数，即在 L，

$$f(X)=c(X-\alpha_1)^{\nu_1}\cdots(X-\alpha_r)^{\nu_r} \quad (\alpha_i\neq\alpha_j). \qquad (24.2)$$

于是$f(X)=0$的所有根$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$都在L中。这时L叫做$f(X)$的**分解体**。分解体中，关于K的維数最小的，叫做**最小分解体**。$f(X)$的最小分解体的維数不大于$f(X)$的次数。特别$f(X)$是既約时，維数与次数一致。並且，$f(X)$的最小分解体除同构外是唯一确定的(即假如L, L'都是$f(X)$的最小分解体，那末L, L'作为体是同构的)。

(viii) 对于$K_k[X]$中元$f(X)=\sum_{i=0}^{k}a_iX^i$, $K_{k-1}[X]$中元$f'(X)=\sum_{i=0}^{k-1}ia_iX^i$叫做$f(X)$的**导函数**。映射$f(X)\rightarrow f'(X)$是自$K$上向量空間$K_k[X]$到$K_{k-1}[X]$的綫性映射。即对于$a$, $b\in K$, f, $g\in K_k[X]$,

$$(af+bg)'=af'+bg'.$$

又关于积的导函数，下面的公式成立：

$$(fg)'=f'g+fg'.$$

(ix) 在(24.2)中，ν_i叫做$f(X)$的根α_i的**重复度**。$\nu_i=1$时，α_i叫做$f(X)$的**单根**。$f(X)$只有单根的必要充分条件是$f(X)$与$f'(X)$互质。

上面除(vii)外想都是熟知的((ix)用(viii)容易証明)。(vii)在§14也曾引用过。关于它的証明在后面例4的解中將有略示，其詳可在同处引用的正田，淺野的书籍中看到。

以上是預备知識的复习，在进入本論的途中，为了不走弯路，首先証明下面关于可换群的三个引理。

引理1 假定G是可換群，x, $y\in G$, x, y的阶分别是m, n, 如果$(m, n)=1$, 那末$z=xy$的阶是mn.

証明 $z^{mn}=(xy)^{mn}=x^{mn}y^{mn}=(x^m)^n(y^n)^m=e$(自第二边到第三边用$G$的可换性)，所以$z$的$mn$乘方无論如何是$e$. 于是$z$的阶是

mn 的約数。反之，$z^l=e\Rightarrow mn|l$ 可如下証明。假定 $z^l=x^ly^l=e$，那末 $e=(x^ly^l)^m=x^{ml}y^{ml}=y^{ml}$。于是 $n|ml$，但 $(m, n)=1$，所以由(ii)有适合 $mh+nk=1$ 这样的 $h, k\in \boldsymbol{Z}$。因此 $l=mlh+nkl$ 是 n 的倍数：$n|l$。同样 $m|l$。因为 $(m, n)=1$，所以 $mn|l$。

引理 2 与前引理同样，假定 G 是可换群，$x, y\in G$，x, y 的阶是 m, n，如果 $n\nmid m$（$n|m$ 的否定），那末 G 中有阶比 m 大的元 z。

証明 $(m, n)=1$ 时，由引理 1 是明显的。因此假定 $(m, n)>1$。作 m, n 的质因数分解

$$m=p_1^{e_1}\cdots p_{r_1}^{e_{r_1}}p_{r_1+1}^{e_{r_1+1}}\cdots p_r^{e_r}\quad n=p_1^{f_1}\cdots p_{r_1}^{f_{r_1}}\cdot p_{r_1+1}^{f_{r_1+1}}\cdots p_r^{f_r},$$

如果 $e_1\geqslant f_1, \cdots, e_{r_1}\geqslant f_{r_1}, e_{r_1+1}<f_{r_1+1}, \cdots, e_r<f_r$。因为 $n\nmid m$，所以 $0\leqslant r_1<r$。于是命

$$m_1=p_1^{e_1}\cdots p_{r_1}^{e_{r_1}},\quad n_1=p_{r_1+1}^{f_{r_1+1}}\cdots p_r^{f_r},$$

那末 $(m_1, n_1)=1$，$m_1|m$，$n_1|n$，$m_1n_1>m$。命 $m=m_1m_1'$，$n=n_1n_1'$，$x^{m_1'}=x_1$，$y^{n_1'}=y_1$，显然 x_1, y_1 的阶是 m_1, n_1。由引理 1，$z=x_1y_1$ 的阶 $m_1n_1>m$。

引理 3 假定 G 是有限可换群，对于任意自然数 n，G 中满足 $x^n=e$ 的元的个数如果不超过 n，那末 G 是循环群。

証明 設 G 的阶是 g，証明 G 中具有阶 g 的元即可。今命 x_1 是 G 中任意元，x_1 的阶是 m_1，假如 $m_1=g$ 那就好了。如果 $m_1<g$，因为 $G-\{e, x_1, x_1^2, \cdots, x_1^{m_1-1}\}=M_1\neq\emptyset$，所以能够自 M_1 取一个元 y_1。假定 y_1 的阶是 n_1，那末 $n_1\nmid m_1$。这是因为，如果 $n_1|m_1$，$m_1=n_1n_1'$，那末 $y_1^{m_1}=(y_1^{n_1})^{n_1'}=e$。于是 G 中 $(m+1)$ 个元 $e, x_1\cdots x_1^{m_1-1}, y_1$ 都满足 $x^{m_1}=e$。这与假設矛盾。所以由引理 2，G 中具有阶比 m_1 大的元 x_2。假如 x_2 的阶 $m_2=g$，那就好了。如果 $m_2<g$，与上面同样进行能够得到阶比 m_2 大的元 x_3。因为数列 $m_1<m_2<\cdots$ 在有限項（最多也不过 g 項）后达到 $m_k=g$，于是引理得証。

以上都是准备，现在进入本題。

在§22例10，看到关于自然数m，把$\boldsymbol{Z}$中元关于$\bmod m$的剩余类形成的群定义为$\boldsymbol{Z}_m$，$\boldsymbol{Z}_m$成为(关于加法)阶m的循环群。在$\boldsymbol{Z}_m$中元之間再如下定义乘法。即假如$x\equiv x' \pmod m$，$y\equiv y' \pmod m$，因为$xy\equiv x'y' \pmod m$，所以根据$(x)_m(y)_m=(xy)_m$，可定义$\boldsymbol{Z}_m$中元(x_m)，(y_m)之間的乘法。这时$\boldsymbol{Z}_m$显然成为可換环(§7)，但一般不一定成为体。在体K中对于异于0的元，因为它有关于乘法的逆元，所以$a, b\in K$，$ab=0\Rightarrow a=0$或$b=0$。这是因为如果$ab=0$，$a\neq 0$，那末$0=a^{-1}0=a^{-1}(ab)=1\cdot b=b$。于是当$m=m_1m_2(m_1, m_2>1)$时，$(m_1)_m$，$(m_2)_m$都不是$(0)_m$，但$(m_1)_m\cdot(m_2)_m=(m_1m_2)_m=(0)_m$，所以$\boldsymbol{Z}_m$不得为体。可是下面的基本命題成立。

命題1　假如p是质数，那末$\boldsymbol{Z}_p$是体。

証明　$(x)_p\neq(0)_p$即$x\not\equiv 0 \pmod p$时証明存在适合$(x)_p(y)_p=(1)_p$，即$xy\equiv 1 \pmod p$的y即可。因为$x\not\equiv 0 \pmod p$，所以$(x, p)=1$。于是由上述(ii)适合$xy+pz=1$的$y, z\in\boldsymbol{Z}$存在。这就意味着$xy\equiv 1 \pmod p$。　　(証毕)

象$\boldsymbol{Z}_p$这样，具有有限个元的体，叫做**有限体**。

例1　假定$p=2$，那末$Z_p=\{(0), (1)\}$，它的元之間的加法，乘法給出如下：

$$(0)+(0)=(0),\quad (0)+(1)=(1)+(0)=(1),\quad (1)+(1)=(0),$$
$$(0)(0)=(0),\quad (0)(1)=(1)(0)=(0),\quad (1)(1)=(1).$$

命題2　任意有限体K是对于某质数p的$\boldsymbol{Z}_p$(与它同构的体)的扩張体。

証明　假定K中用它的乘法单位元1生成的加法群的子群是$K_0=\{0, 1, 1+1, \cdots\}$，如果$K_0$的阶(即1在$K$的加法群中的阶)是$m$，那末

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{个}}=0.$$

如果 m 不是质数，$m=m_1m_2(m_1,\ m_2>1)$，那末在 K 中由分配律显然

$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{m_1\text{个}}\underbrace{(1+\cdots+1)}_{m_2\text{个}}=\underbrace{1+\cdots+1}_{m\text{个}}=0.$$

于是由在命题1上面的注意，$\underbrace{1+\cdots+1}_{m_1\text{个}}=0$ 或 $\underbrace{1+\cdots+1}_{m_2\text{个}}=0$，这与 m 是1的阶的假定矛盾。所以 m 不得不是质数 p. 这样就得 $K_0\cong \boldsymbol{Z}_p\subset K$.　(証毕)

象在上面証明中看到的一样，对于任意体 K（不是有限体也可），在加法群中1的阶是质数 p 或是无限。当它的阶是 p 时，K 的**特征数**叫做 p，是无限时 K 的特征数叫做0. 特征数 p 的体都是 $\boldsymbol{Z}_p$（与它同构的体）的扩張体。同样，特征数0的体是有理数体（与它同构的体）的扩張体。因此 $\boldsymbol{Z}_p$ 叫做特征数 p 的**质体**，有理数体叫做特征数0的质体。

命题3　特征数 p 的有限体 K 中元的个数等于 p 的某乘幂 p^n.

証明　K 是 $\boldsymbol{Z}_p$ 的扩張体，維数 $(K:\boldsymbol{Z}_p)=n$ 当然是有限。把 K 看成 $\boldsymbol{Z}_p$ 上向量空間时，它的基底如果是 $e_1,\ \cdots,\ e_n$，那末 K 的任意元 x 能够唯一的表为

$$x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n,\quad \alpha_i\in\boldsymbol{Z}_p$$

的形状。因为各个 α_i 能够各自独立地取 $\boldsymbol{Z}_p$ 中 p 个元，所以 x 的个数是 p^n.

命题4　自 $(K:\boldsymbol{Z}_p)=n$ 的有限体 K 只除去0的集合 $K^*=K-\{0\}$ 关于乘法所成的群是阶为 p^n-1 的循环群。

証明　K^* 的阶显然是 p^n-1. 又根据在上面引用的 (iv)，关于任意自然数 m 满足 $x^m=1$ 的 K 中元的个数不超过 m. 所以由引理3，K^* 成为循环群。

系　K 中所有元都满足方程 $x^{p^n}=x$.

例2　假定 $x\in\mathbf{Z}$，p 是任意质数，那末 $x^p\equiv x(\mathrm{mod}\,p)$（Fermat 定理）。

［解］ 因为体 $\mathbf{Z}_p$ 中元的个数是 p，所以对于其中元(x)，由上系 $(x)^p=(x)$成立。于是 $(x^p)=(x)$，此即意味着 $x^p\equiv x(\mathrm{mod}\ p)$。

例 3 $\mathbf{Z}_7^*$ 能够用(-2)生成。

［解］ 因为 $\mathbf{Z}_7^*$ 的阶是6，所以其元的阶是1，2，3中之一。但是$(-2)\neq(1)$，$(-2)^2=(4)\neq(1)$，$(-2)^3=(-8)=(5)\neq(1)$。所以(-2)的阶是6。因此 $\mathbf{Z}_7^*$ 能够用(-2)生成。

定理 4 对于质数 p 与任意自然数 n，存在具有 p^n 个元的有限体，它除同构外是唯一确定的。

証明 假定 $\mathbf{Z}_p$ 中 p^n 次多项式 $X^{p^n}-X=f(X)$ 的最小分解体是K。因为$f(X)$的导函数$f'(X)=-1$，所以最大公約数$(f(X),f'(X))=1$，因此$f(X)$在K中有p^n个单根。命 $p^n=q$，假定它們的根是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ 来証明K正好只由这q个元形成。实际上，假如$f(\alpha)=0$，$f(\beta)=0$ 即 $\alpha^q=\alpha$，$\beta^q=\beta$，那末（K的特征数是p，因而K中任意元的p倍是0，又二项系数$\binom{q}{k}=\binom{p^n}{k}$对于$1\leqslant k\leqslant q-1$是$p$的倍数）

$$(\alpha\pm\beta)^q=\alpha\pm\beta,\quad (\alpha\beta)^q=\alpha\beta.$$

如果 $\alpha\neq 0$，
$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^q=\frac{\beta}{\alpha}.$$

即只由$f(X)=0$的根已能成为体。因为K是"最小"分解体，所以$K=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_q\}$，又由命题4的系与最小分解体的唯一性，具有$p^n$个元的有限体只有这个$K$（与它同构的体）。 （証毕）

上面具有 $q=p^n$ 个元的有限体K是 Galois 导入的，Dickson因此常常写成 $GF(q)$（GF 是 Galois Field 的略）。以上已示明 $GF(q)$ 唯一存在。如命题3所示，$GF(q)$ 的加法群是 n 个 $\mathbf{Z}_p$ 的加法群的直和，如命题4所示，乘法群$(GF(q))^*$是阶为 $q-1$ 的循环群。$GF(q)$与代数整数論也深有联系。又考虑 $GL(n, GF(q))$ 及它的子群能够得到有限群的很饒趣的实例。在应用上能够利用

实驗設計法。

关于$GF(q)$的基本事項，理論的尽述于上，但利用实驗設計法等时，实际上引起了作$GF(q)$中元之間加法，乘法表的必要。这无非是把$f(X)=0$在Z_p中来"解"。以下示其一例。

例 4　求作$GF(3^2)$的加法，乘法表。

[解]　$K=GF(3^2)$是$Z_3=\{0, 1, 2\}$(为了以下簡单，关于mod 3的剩余类(0)，(1)，(2)用0，1，2表示)的二次扩張。$f(X)=X^9-X=X(X^8-1)$应該有二次旣約因式$g(X)$，K能够"添加"$g(X)=0$的根于Z_3得出($f(X)$的二次旣約因式如果有几个，因为把它的任一个作为$g(X)$也能够得到同构的K，所以不論那一个作为$g(X)$都可以)。因为$X^8-1=(X^4-1)(X^4+1)=(X^4+1)(X^2+1)(X^2-1)$，$X^2+1$对于mod 3是旣約(实际上$0^2+1=1, 1^2+1=2, 2^2+1=2$，即使$X=0, 1, 2$中任一个$X^2+1$也不是0)。所以"添加"$X^2+1$的根于$Z_3$就能够得到$K$。

于是Galois象下面这样来考虑。例如复数体C能够"添加"$\sqrt{-1}$于R得出，但是，如果代数的考虑，于R添加$\sqrt{-1}$不外是把$R[X]$用mod(X^2+1)来計算(把$\sqrt{-1}$象"变数"来考虑，$(\sqrt{-1})^2+1$出現时假定为0)。同样，不論何体，譬如現今的例Z_3，所謂于它"添加"X^2+1的根，就是把$Z_3(X)$用mod(X^2+1)来計算——实际上，象它那样做能够得到Z_3的扩張体，此可与Z_p是体同样証明。$Z_3[X]$用mod(X^2+1)来計算时，X的类暂时用i表示(象这样所得到的Z_p的扩張体中元有时叫做**Galois的虚数**)。因此$i^2=-1$，我們的K中元能够写成$a+bi$，$a, b\in Z_3$的形状。于是K^*的阶是8，能够找到阶8的元即可。写出i的幂来看，$1, i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$，所以$i$的阶是4。不在其中$K^*$中的元，如引理3的証明中所示，应該有自乘4次而不是1的元。假如自乘4次不成为1，那末它的阶不得不是8。例如$1+i$就是这样的。实际上，

$$(1+i)^2=-i,\ (1+i)^3=-i(1+i)=1-i,$$
$$(1+i)^4=-1,\ (1+i)^5=-1-i,\ (1+i)^6=i,$$
$$(1+i)^7=-1+i,\ (1+i)^8=1.$$

实行$GF(3^2)$的計算时，利用右边那样的图式頗为便利。

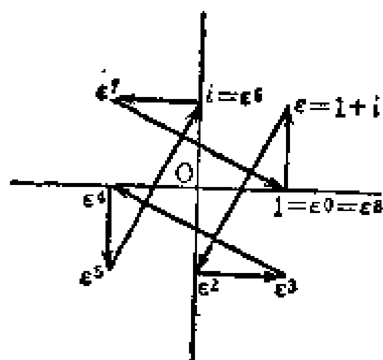


图　24.1

第3章　有限群的表現論

§25 表現空間与不变子空間,可約表現与既約表現

因为在这章所討論的向量空間都假定是有限維的，而且是在复数域 C 上,所以今后不再一一声明。于是 n 維向量空間 V 的自同构映射全体所形成的群 $GL(V)$ 就与 $GL(n, C)$ 同构。

如在第2章§22所述，所謂群 G 的表現指的是自 G 到 $GL(n, C)$ 的同态映射(特别,当它是同构映射时,就叫它做**同构表現或忠实表現**)，而自然数 n 叫做这个表現的**次数**。假如 $\dim V=n$，因为 $GL(V)\cong GL(n, C)$，所以 G 的表現 ρ 又可以看成是自 G 到 $GL(V)$ 的同态映射。如果自 G 到 $GL(V)$ 的同态映射 ρ 給定时，V 叫做 G 的表現 ρ 的**表現空間**(或者叫 ρ 做**在 V 的表現**)。于是，表現的次数就是表現空間的維数。表現空間的討論有助于把群表現論作几何学地描述。

假定 ρ 是群 G 在 V 的表現，那末对于 $a, b\in G$ 有 $\rho(a), \rho(b), \rho(ab^{-1})\in GL(V)$，并且

$$\rho(a)(\rho(b))^{-1}=\rho(ab^{-1}).$$

例1　假設 G 是任意群，V 是任意向量空間，那末对于 G 的所有元使与 e_V(V 的恒等映射)对应,就給出 G 的一个表現。这是"自明的表現"。但在討論 G 的表現全体时,不可忽視。它称为 G 在 V 的**恒等表現**。(如果 G 不是单位群,恒等表現就不是同构表現。)

例2　假設 V 是任意向量空間，$\{e_V, -e_V\}$($-e_V$ 是对于 $x\in V$ 使 $-x\in V$ 对应的映射) 构成 $GL(V)$ 中阶是2的子群。再假設 G 具有指数是2的子群(因而是 G 的正規子群) H 时，令 $G=H+Ha$,那末对于 H 的元使 e_V 对应,对于 Ha 的元使 $-e_V$ 对应的映射就給出 G 在 V 的表現，它叫做 G (在 V) 的**交代表現**。

例 3　假如 $G\subset GL(n, C)$，对于 G 的各元使它自身对应的映射当然給出 G 的同构表現。它叫做 $G(\subset GL(n, C))$ 的**自然表現**。

当 ρ_1, ρ_2 是 G 分别在 V_1, V_2 的表現时，假如有自 V_1 到 V_2 的同构映射 f，并且对于 G 中任意元 a，

$$f\circ\rho_1(a)=\rho_2(a)\circ f ❶,$$

那末 ρ_1, ρ_2 叫做**等价的**或**相似的**表現，写成 $\rho_1\sim\rho_2$。显然，等价表現具有相同的次数，这关系 $\sim$ 满足反射、对称、推移三律。这时表現空間 V_1, V_2 也叫做等价的或同构的(参照174頁)。

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1(a)} & V_1 \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_2(a)]{} & V_2 \end{array}$$

特别，如果 $\dim V=n$，在 V 取基底 $(a_1, \cdots, a_n)$，那末 V 的坐标系 $\varphi=\varphi(a_1,\cdots,a_n)$ 就确定了，由 φ，V 能够同构映射于 C^n。因之，G 的表現 ρ 与 G 在 C^n 的表現 $a\to P(a)=\varphi\circ\rho(a)\circ\varphi^{-1}$ 成为等价。$P(a)$ 是 n 級正則矩陣。$a\to P(a)$ 叫做 G 的 n 級**矩陣表現**。也叫它为 ρ 关于 V 的坐标系 φ 的矩陣表現。假如把 V 的坐标自 φ 变换到 ψ，"坐标变换的矩陣"如果是 $\psi\circ e_V\circ\varphi^{-1}=T$ 时，就得到矩陣表現 $a\to TP(a)T^{-1}$，它叫做与 $a\to P(a)$ 等价的，或相似的矩陣表現。

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{e_V} & V & \xrightarrow{\rho(a)} & V & \xrightarrow{e_V} & V \\ \psi\downarrow & & \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi & & \downarrow\psi \\ C^n & \xrightarrow[T^{-1}]{} & C^n & \xrightarrow[P(a)]{} & C^n & \xrightarrow[T]{} & C^n \end{array}$$

假如給定了 G 在 V 的表現 ρ，那末

$$\rho(G)=\{\rho(a)\,;a\in G\}$$

是 $GL(V)$ 的子集合，对于 $\rho(G)$ 的任意元 $\rho(a)$，使

$$\rho(a)\,(W)\subset W$$

这样的 V 的子空間 W，叫做 ρ 的**不变子空間**。假如 ρ 的不变子空間全体的集合是 $\mathfrak{W}(\rho)$，显然 $\mathfrak{W}(\rho)\ni\{0\}, V$。又与第1章§4

❶　也就是对于 V_1 中任意向量 V_1 及 G 中任意元 a 等式 $f[\rho_1(a)V_1]=\rho_2(a)\circ fV_1$ 成立。——譯者注

中命題1，2完全一样能够得到下面的命題。

命題 1 $\mathfrak{W}(\rho)\ni W_a\Rightarrow\bigcap_a W_a\in\mathfrak{W}(\rho)$.

命題 2 假如 M 是 V 的任意子集合，那末 $\mathfrak{W}(\rho)$ 中存在唯一含 M 的"最小"元 $W(M)$. $W(M)$ 叫做由 M **生成**的 ρ 的不变子空間。特别，如果 $M=\{x\}$，那末

$$W(\{x\})=\left\{\sum_{a\in G}\lambda_a\rho(a)x;\ \lambda_a\in \boldsymbol{C},\ (\lambda_a\text{ 除有限个外都是 }0)\right\}.$$

定理 1 假設 ρ 是群 G 在 n 維向量空間 V 的表現，ρ 具有 $\{0\}$，V 以外的不变子空間 W. 这时，在 V 中如果取适当的坐标系 φ，那就能够得到由下面那样形状的 G 的矩陣表現。

$$a\rightarrow P(a)=\begin{pmatrix} A(a) & B(a) \\ & \\ O_{n_2,n_1} & C(a)\end{pmatrix}\begin{matrix}\updownarrow n_1\\ \\ \updownarrow n_2\end{matrix},\quad n_1=\dim W.$$
$$\longleftarrow n_1\longrightarrow\longleftarrow n_2\longrightarrow$$

又它的逆也成立。

証明 因为 $W\neq\{0\}$，V，所以 $0<\dim W=n_1<n$. 命 $n_1+n_2=n$，那末 $0<n_2<n$. 令 $(a_1,\cdots,a_{n_1})$ 为 W 的基底，因为 V 的基底能够取 $(a_1,\cdots,a_{n_1},a_{n_1+1},\cdots,a_n)$ 的形状（§5，定理5，系4）。于是命 $P(a)=(\alpha_{ij})$ 时，由 §8 就有

$$P(a)\cdot a_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}a_i,$$

但 $\rho(a)W\subset W$，所以当 $j=1,\cdots,n_1$ 时，有 $\alpha_{ij}=0,i=n_1+1,\cdots,n$. 因此 $P(a)$ 就成为上面形状的矩陣。

反之，假如有象上面那样形状的矩陣表現，如果在給出这表現的 V 的基底中，由最初 n_1 个向量生成的子空間是 W，那末 W 显然是 ρ 的不变子空間。

系 假如群 G 的表現 ρ 的表現空間 V 能够表为不变子空間

$W_1, \cdots, W_k$ 的直和，即

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k, \quad W_i \in \mathfrak{W}(\rho),$$

那末在 V 如果取适当的坐标系，就能够得到 G 象下面形状的矩陣表現

$$a \to P(a) = Q_1(a) \oplus \cdots \oplus Q_k(a).$$

这里，$Q_i(a)$ 的級数等于 $\dim W_i$，而 $a \to Q_i(a)$ 成为 G 在 W_i 的表現 $\varkappa_i$。 （系毕）

这时，表現 ρ 叫做 $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_k$ 的**直和**，可如下写出

$$\rho = \varkappa_1 \oplus \cdots \oplus \varkappa_k.$$

群 G 的表現 ρ 的表現空間 V 具有异于 $\{0\}$ 及 V 的不变子空間时——即 G 具有在定理 1 中所說的那样形状的矩陣表現时——表現 ρ 叫做**可約的**，不是可約的表現，叫做**旣約的**。ρ 是可約，且它的表現空間 V 成为两个以上（不是 $\{0\}$）不变子空間的直和时——即由定理 1 系，ρ 成为几个表現的直和时——ρ 就叫做**直可約**。

例 4 1 級表現都是旣約的。

例 5 对于 G 的表現 ρ 的表現空間 V 的任意两个 1 維子空間 V_1, V_2，假如存在满足 $\rho(a)V_1 = V_2$ 这样的 $a \in G$，那末 ρ 是旣約的。

［解］ 假設 W 是 ρ 异于 $\{0\}$ 的不变子空間，如果 $W \ni x \neq 0$，由命題 2 与我們的假設，就得到 $W = V$。

例 6 $GL(n, C)$, $U(n, C)$ 的自然表現都是旣約的。

［解］ 由例 5 容易明白。

§26 Schur 引理

有限群的表現論在前世紀末由 Frobenius 創始，而且大体上完成了，1920 年 I. Schur 給以显著的簡化。成为他方法的基础的是所謂 “Schur 引理” 这个簡单命題。它不但是在群表現論中，并且还是应用很广的有用命題。Schur 把这命題作为矩陣运算的一个定理給出。于此，我們用下面与它稍异的形式来表达。

在前节，曾經定义群 G 的表現 ρ 的不变子空間，既約性、可約性等，現在把这些概念稍予扩張。一般，假定向量空間 V 的自同构群 $GL(V)$ 的任意子集合叫做 $\mathfrak{A}(V)$ 集合。如果 A 是一个 $\mathfrak{A}(V)$ 集合，A 中各元 ρ_α 是自 V 到 V 的正則綫性映射，假如 V 的子空間 W 对于任意 $\rho_\alpha \in A$ 常常有 $\rho_\alpha(W) \subset W$，那末 W 叫做 A 的不变子空間(在前节討論的是 $A=\{\rho(a); a\in G\}=\rho(G)$ 的情況。$\rho(G)$ 是与 G 同态的群，但一般沒有必要要求 $\mathfrak{A}(V)$ 集合成为群)。关于 A 的不变子空間 $\mathfrak{W}(A)$，与前节命題 1，2 及定理 1 完全同样的命題显然都是成立的。当 $\mathfrak{W}(A)=\{\{0\}, V\}$ 时，A 叫做是既約的。

假定 V_1, V_2 是两个綫性空間，A_1, A_2 分别是 $\mathfrak{A}(V_1)$ 集合及 $\mathfrak{A}(V_2)$ 集合，A_1, A_2 中元一般用 $\rho_\alpha^{(1)}$, $\rho_\beta^{(2)}$ 表示。自 V_1 到 V_2 的綫性映射 f 如果滿足下面两条件 (S_1), (S_2)，那末 f 叫做自 A_1 到 A_2 的**协变变換**。

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_\alpha^{(1)}} & V_1 \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_\beta^{(2)}]{} & V_2 \end{array}$$

(S_1)　对于任意 $\rho_\alpha^{(1)} \in A_1$，存在使

$$f\circ\rho_\alpha^{(1)}=\rho_\beta^{(2)}\circ f \tag{25.1}$$

成立的 $\rho_\beta^{(2)} \in A_2$.

(S_2)　对于任意 $\rho_\beta^{(2)} \in A_2$，存在使 (25.1) 成立的 $\rho_\alpha^{(1)} \in A_1$.

定理 2 (Schur 引理)　假定 V_1, V_2 是两个綫性空間，A_1, A_2 分别是既約的 $\mathfrak{A}(V_1)$ 集合和既約的 $\mathfrak{A}(V_2)$ 集合，如果 f 是自 A_1 到 A_2 的协变变換，那末 (i) $f=0$，或 (ii) f 是同构映射，两者必居其一。

証明　$\operatorname{Im} f=V_2'$ 是 V_2 的子空間，并且能够証明 $V_2'\in\mathfrak{W}(A_2)$. 实际上，假如 $y\in V_2'$ 即 $y=f(x)$, $x\in V_1$，那末由 (S_2)，对于任意 $\rho_\beta^{(2)}\in A_2$，有滿足 $\rho_\beta^{(2)}(y)=\rho_\beta^{(2)}\circ f(x)=f\circ\rho_\alpha^{(1)}(x)$ 的 $\rho_\alpha^{(1)}\in A_1$. 因为 A_1 是 $\mathfrak{A}(V_1)$ 集合，当然 $\rho_\alpha^{(1)}(x)\in V_1$，因此 $\rho_\beta^{(2)}(y)\in \operatorname{Im} f=V_2'$. 与这完全同样，能够証明 $\operatorname{Ker} f=V_1'\in\mathfrak{W}(A_1)$.

由 A_1, A_2 既約性的假定，得 $V_1'=\{0\}$ 或 V_1, $V_2'=\{0\}$ 或 V_2,

如果 $V_1'=V_1$，当然 $V_2'=\{0\}$，因此 $f=0$. 不論怎样，如果 $V_2'=\{0\}$，那末 $f=0$. 所以就有 (i) 的情况。否則，$V_1'=\{0\}$，$V_2'=V_2$，即 f 是全单射，因此不得不是同构映射。所以有 (ii) 的情况。

系 假定 ρ_1, ρ_2 是群 G 分别在 V_1, V_2 的既約表現，如果对于任意 $a\in G$，存在满足

$$\rho_2(a)\circ f=f\circ\rho_1(a)$$

的 $f\in L(V_1, V_2)$，那末 $f=0$ 或 $\rho_1\sim\rho_2$. （系毕）

为了叙述下面定理，对于 $\mathfrak{A}(V)$ 集合 A，定义 $\{\sigma;\sigma\in\mathfrak{L}(V),\ \rho\circ\sigma=\sigma\circ\rho,\ \forall\rho\in A\}$ 为 A 的**交換子集合** A'. A' 中元——即 $\mathfrak{L}(V)$ 中与 A 中所有元可交換的元——叫做 A 的**交換子**。

命題 3 假如 A 是任意 $\mathfrak{A}(V)$ 集合，那末 $A'\cup\{0\}=\mathfrak{A}'$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的可除代数(参照第 1 章 §7, 例 14)。

証明 因为 $A'\subset\mathfrak{L}(V)$，所以在 A' 中元 σ, σ_1, σ_2 及 $\lambda\in\boldsymbol{C}$ 之間，能够定义乘法 $\sigma_1\circ\sigma_2$（作为映射的積合），加法 $\sigma_1+\sigma_2$ 及 $\lambda\sigma$（作为 $\mathfrak{L}(V)$ 中元，依 §7 的意义）。由交換子的定义，显然

$$\sigma,\ \sigma_1,\ \sigma_2\in A'\Rightarrow\sigma_1\circ\sigma_2,\ \sigma_1+\sigma_2,\ \lambda\sigma\in A'.$$

又
$$\lambda(\sigma_1\circ\sigma_2)=\lambda\sigma_1\circ\sigma_2=\sigma_1\circ(\lambda\sigma_2)$$

也是显然的。于是 A' 是 $\mathfrak{L}(V)$ 的子环，并且成为 $\boldsymbol{C}$ 上的代数。但由定理 2，假如 $\sigma\in A'$ 不是 0，那末 $\sigma\in GL(V)$，因此 $\sigma^{-1}\in GL(V)$，于是由交換子的定义，显然 $\sigma^{-1}\in A'$. 所以 A' 是 $\boldsymbol{C}$ 上的可除代数。

定理 3 假定 V 是有限維，A 是既約的 $\mathfrak{A}(V)$ 集合，那末 A' 是与 $\boldsymbol{C}$ 同构的体。

証明 假定 σ 是 A' 中任意元，如果 σ 的特征值之一是 α，因为 $\mathrm{Ker}\,(\sigma-\alpha)\neq 0$，那末 $\sigma-\alpha$ 不是同构映射。但是对于既約 A 中任意元 ρ，因为 $(\sigma-\alpha)\circ\rho=\rho\circ(\sigma-\alpha)$ 成立，所以由定理 2 系，不得

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & V \\ {\scriptstyle\sigma-\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma-\alpha} \\ V & \xrightarrow[\rho]{} & V \end{array}$$

不 $\sigma-\alpha=0$。

系 1　假定 $G\ni a\to P(a)$是群 G 关于 n 級(在 $\boldsymbol{C}$)矩陣的既約矩陣表現，$Q\in\mathfrak{M}(n,\boldsymbol{C})$。如果，对于任意 $a\in G$ 有 $P(a)Q=Q\cdot P(a)$，那末 $Q=\alpha E_n$（卽 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{C}^n)$ 集合 $\{P(a);\ a\in G\}$ 的交換子只有 αE_n 形状的元）。

系 2　$\mathfrak{M}(n,\boldsymbol{C})$ 中与 $GL(n,\boldsymbol{C})$（或 $U(n,\boldsymbol{C})$）的所有元可交換的中元，只有 αE_n 形状的矩陣。

証明　由 167 頁例 6 卽得。

定理 4　可換群的有限次既約表現都是 1 級的。

証明　假定 G 是可換群，ρ 是它的有限級既約表現，V 是 ρ 的表現空間，那末 $\rho(G)=\{\rho(a);\ a\in G\}=A$ 是既約的 $\mathfrak{A}(V)$ 集合。因为 G 是可換，显然 $A\subset A'$。由前定理，A' 中元——因而这时所有 A 中元——能够表为 $\alpha E_r(r=\dim V)$ 的形狀，所以 $r>1$ 就与 A 的既約性不合。

例　循环群 $\boldsymbol{Z}_m$ 的表現。

［解］　由定理 4，$\boldsymbol{Z}_m$ 的有限級既約表現 ρ 是 1 級的，所以

$$\rho:\ \boldsymbol{Z}_m\to\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\},$$

如果把 $\boldsymbol{Z}_m$ 的生成元——1 的类——用 a 表示，那末

$$\boldsymbol{Z}_m=\{0,\ a,\ 2a,\ \cdots,\ (m-1)a\},\ ma=0.$$

假定 $\rho(a)=\alpha\in\boldsymbol{C}^*$，那末 $\alpha^m=1$。卽 α 必須是 1 的 m 次根。又假定 1 的任意 m 次根 $\exp 2\pi k\frac{\sqrt{-1}}{m}$ 是 $\alpha_k(k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$，命

$$\rho_k(a)=\alpha_k,\quad \rho_k(ja)=\alpha_k^j\quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1),$$

那末 ρ_k 显然給出 $\boldsymbol{Z}_m$ 的既約表現。$\boldsymbol{Z}_m$ 具有这 m 个既約表現，其他任意表現是这等既約表現的直和(参照下节)。

§27　完全可約表現

假定 ρ 是群 G 的表現，V 是它的表現空間(参看 §25)，如果 W 是 V 的不变子空間，那末自 $a\in G$ 到 $\rho(a)\,|\,W$ 的映射，給出 G

的 ($\dim W$ 級)表現(定理 1)。它叫做 ρ 对于 W 的**子表現**，用 $\rho|W$ 来表示。假定 $\dim V=n$, $\dim W_1=n_1$, $0<n_1<n=n_1+n_2$，如果 $(a_1, \cdots, a_{n_1})$ 是 W 的一个基底，$(a_1, \cdots, a_{n_1}, a_{n_1+1}, \cdots, a_n)$ 是包含它的 V 的基底(§ 5, 定理 5 系 4, 23 頁)，那末由这基底，G 能够用矩陣表現为

$$G \ni a \to P(a)=\begin{pmatrix} A(a) & B(a) \\ O_{n_2, n_1} & C(a) \end{pmatrix} \tag{27.1}$$

的形状。$a \to A(a)$ 是子表現 $\rho|W$ 的矩陣表現。

这时，G 把剩余空間 V/W 作为表現空間的表示，可以象下面这样来构成。即 $x \in V$ 关于 $\bmod W$ 的剩余类 $(x)_W$ 确定 $(\rho(a)(x))_W$ (实际上，假如 $x \equiv y \bmod W$，由 $\rho(a)(W) \subset W$ 立刻得知 $\rho(a)x \equiv \rho(a)(y) \bmod W$)。易知 $(x)_W \to (\rho(a)(x))_W$ 是 $GL(V/W)$ 中元(即 V/W 到它自身中的映射)。假如 $GL(V/W)$ 中元用 $\rho_W(a)$ 表示，那末 $G \ni a \to \rho_W(a) \in GL(V/W)$ 显然成为 G 把 V/W 作为表現空間的表現。它叫做 ρ 关于 $\bmod W$ 的**剩余表現**。

用上面記法，$(a_{n_1+1})_W, \cdots, (a_n)_W$ 給出 V/W 的一个基底。由这基底 ρ 关于 $\bmod W$ 的矩陣表現是 $a \to C(a)$ [$C(a)$ 是 (27.1) 中的記法]。

特別，$[a_{n_1+1}, \cdots, a_n]=W'$ 也成为不变子空間时，ρ 是直可約，$V=W \oplus W'$，$\rho=(\rho|W) \oplus (\rho|W')$，而剩余表現 ρ_W 与子表現 $\rho|W'$ 一致。

不具有子表現的表現不外是既約表現。既約表現的表現空間——即除 $\{0\}$ 及自身外不具有不变子空間的表現空間——叫做**既約**的。能够表为既約表現的直和的表現，叫做**完全可約**的(既約表現自身也叫做完全可約)。

定理 5 下面三个条件是等价的:

(C_1) 群 G 的表現 ρ 是完全可約的。

(C_2) ρ 的表現空間 V 是既約表現空間的直和。

(C_3) 如果 V 是 ρ 的表現空間，W 是 V 的任意不变子空間，那末 V 中就存在滿足 $V=W\oplus W'$ 的不变子空間 W'.

証明 $(C_1)\Leftrightarrow(C_2)$ 是明显的。

$(C_2)\Rightarrow(C_3)$ 的証明。假定

$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$，$V_i$ 是既約不变子空間 $(i=1,\cdots,r)$. (27.2)

如果 W 是 V 的不变子空間，那末 $W\cap V_i=W_i$ 也是 V 的不变子空間，因为 $W_i\subset V_i$，V_i 是既約，所以 $W_i=\{0\}$ 或 $W_i=V_i$ 两者必有一成立。因此，如果 $W_i=V_i$，$i=1,\cdots,\nu_1-1$，$W_{\nu_1}=\{0\}$（卽如果 $W\supset V_1,\cdots,V_{\nu_1-1}$，$W\cap V_{\nu_1}=\{0\}$），那末 $W\oplus V_{\nu_1}$ 被定义，显然它成为 V 的不变子空間。又 $W\oplus V_{\nu_1}\supset V_i$，$i=1,\cdots,\nu_1$. $W\oplus V_{\nu_1}$ 显然都是 V 的不变子空間，現在与考察 W 一样来考察 $W\oplus V_{\nu_1}$，那末 $W\oplus V_{\nu_1}\supset V_i$，$i=\nu_1+1,\cdots,\nu_2-1$，$(W\oplus V_{\nu_1})\cap V_{\nu_2}=\{0\}$ 这样的番号 ν_2 确定，而 $W\oplus V_{\nu_1}\oplus V_{\nu_2}$ 成为 V 的不变子空間，并且 $\supset V_i$，$i=1,\cdots,\nu_2$. 继續这样下去，最后得到

$$W\oplus V_{\nu_1}\oplus V_{\nu_2}\oplus\cdots\oplus V_{\nu_k}\supset V_i\quad(i=1,\cdots,\nu).$$

于是 $$V\supset W\oplus V_{\nu_1}\oplus\cdots\oplus V_{\nu_k}\supset V_1\oplus\cdots\oplus V_\nu=V.$$

所以 $$W\oplus V_{\nu_1}\oplus\cdots\oplus V_{\nu_k}=V.$$

因此命 $W'=V_{\nu_1}\oplus\cdots\oplus V_{\nu_k}$ 卽得。

$(C_3)\Rightarrow(C_2)$ 的証明。假如 V 自身是既約，那就好了。假如 V 是可約，如果 V_1 是 V 的最小維的不变子空間，那末 V_1 显然是既約。对于 $W=V_1$ 引用 (C_3) 就得到滿足 $V=V_1\oplus V_1'$ 的不变子空間 V_1'. 假如 V_1' 是既約，那就好了。如果又是可約，命含于 V_1' 的最小維的不变子空間是 V_2，那末 V_2 是既約。再对于 $W=V_1\oplus V_2$ 引用 (C_3) 就得到 $V=V_1\oplus V_2\oplus V_2'$. 继續这个方法能够得到象 (27.2) 那样的直和分解。 （証毕）

表現空間 V 滿足上面的条件 (C_2) 或 (C_3) 时，叫做**完全可約**。

这时 V 不外是某完全可約表現的表現空間。下面系的証明包含在上定理的証明中。

系 假定 V 是群 G 的完全可約表現空間，如果

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_r$$

是 V 的既約不变子空間的直和分解，那末对于 V 的任意不变子空間 W，能够自 $V_1, \cdots, V_r$ 中适当的挑选 $V_{\nu_1}, \cdots, V_{\nu_k}$，使

$$V=W\oplus V_{\nu_1}\oplus\cdots\oplus V_{\nu_k}. \qquad \text{(系毕)}$$

由定理 5 及它的系，象下面所示能够导出如下的定理。

定理 6 假定 ρ 是群 G 的完全可約表現，如果

$$\rho=\varkappa_1\oplus\cdots\oplus\varkappa_r=\varkappa'_1\oplus\cdots\oplus\varkappa'_{r'}$$

是 ρ 的两种既約表現的直和分解，那末 $r=r'$，如果必要，适当排列 $\varkappa'_1, \cdots, \varkappa'_{r'}=\varkappa'_r$，能够使 $\varkappa_1\sim\varkappa'_1, \cdots, \varkappa_r\sim\varkappa'_r$（$\sim$ 为等价表現（参照 §25））。 (定理毕)

当 ρ_1, ρ_2 是 G 的等价表現时，ρ_1 的表現空間 V_1 与 ρ_2 的表現空間 V_2 叫做作为**表現空間的同构**，用 $V_1\sim V_2$ 表示。(所謂 V_1, V_2 是表現空間是有自 G 到 $GL(V_1)$, $GL(V_2)$ 的同态映射——G 的表現——ρ_1, ρ_2 而 V_1, V_2 分別是 ρ_1, ρ_2 的表現空間。) 假如 V_1, V_2 是 G 的同构表現空間，那末对于任意 $x\in G$，有自 V_1 到 V_2 满足

$$f\circ\rho_1(x)=\rho_2(x)\circ f$$

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1(x)} & V_1 \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_2(x)]{} & V_2 \end{array}$$

的(作为向量空間的)同构映射 f。这 f 叫做自 V_1 到 V_2 作为**表現空間的同构映射**(用这种叙述方法，"作为表現空間"这話，当 V_1, V_2 显然是表現空間时，有时省略)。定理 6 就表現空間来叙述，就成为下面的定理。

定理 6′ 假定 V 是群 G 的完全可約表現空間，如果

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r=V'_1\oplus\cdots\oplus V'_{r'}. \qquad (27.3)$$

是 V 的两种既約不变子空間的直和分解，那末 $r=r'$ 并且如果必

要，适当排列 $V'_1, \cdots, V'_{r'}=V'_r$，能够使 $V_i \sim V'_i\ (i=1, \cdots, r)$.

証明　依定理 6′ 的形式，用关于 r 的归納法来証明。

当 $r=1$ 时，假如 $r'>1$，那末 $V'_1 \subsetneqq V=V_1$. 这与 V_1 是既約的假定矛盾。所以 $r'=1$，于是 $V=V_1=V'_1$. 因此，当然 $V_1 \sim V'_1$.

直和因子个数是 $r-1$ 时，假定其成立，来証明直和因子个数是 r 时亦成立。假定 $r' \geqq r$. 命 $V'_1 \oplus \cdots \oplus V'_{r'-1}=W'$，由定理 5 的系，$V=W' \oplus W$，而 W 是几个 V_i 的直和。因为 $W \sim V/W' \sim V'_{r'}$，$V'_{r'}$ 是既約，所以 W 与 V_i 中某一个同构。如果 $W \sim V_r$，那末 $W'=V'_1 \oplus \cdots \oplus V'_{r'-1} \sim V/W \sim V/V_r \sim V_1 \oplus \cdots \oplus V_{r-1}$. 由这同构对应，假如 $V_1, \cdots, V_{r-1}$ 到 W' 内的象是 $V''_1, \cdots, V''_{r-1}$，那末

$$W'=V'_1 \oplus \cdots \oplus V'_{r'-1}=V''_1 \oplus \cdots \oplus V''_{r-1},\ V''_i \sim V_i\ (i=1, \cdots, r-1).$$

这是 W' 关于既約不变子空間的两种直和分解，因为 $r-1 \leqq r'-1$，所以由归納法的假定，$r-1=r'-1$，并且适当改换番号，能成为

$$V'_i \sim V''_i \quad (i=1, \cdots, r-1).$$

因此　　　　$r=r',\ V_i \sim V'_i \quad (i=1, \cdots, r).$　　　　（証毕）

注意　实际上，有下面更一般的定理 (Jordan, Hölder–E. Noether)。

假定 V 是群 G 的任意表現空間（不一定是完全可約）。这时作 V 的不变子空間列

$$V_0=\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r=V, \tag{1}$$

使得商空間 $W_i=V_i/V_{i-1}$, $i=1, \cdots, r$ 都是既約。于(1)之外，如果

$$V'_0=\{0\} \subset V'_1 \subset V'_2 \subset \cdots \subset V'_{r'}=V \tag{1'}$$

是与(1)同种类的列 ($W'_j=V'_j/V'_{j-1}$, $j=1, \cdots, r'$ 都是既約)，那末 $r=r'$，并且取 $1, \cdots, r$ 的适当排列 $\nu_1, \cdots, \nu_r$，能够使 $W_1 \sim W'_{\nu_1}, \cdots, W_r \sim W'_{\nu_r}$.

因为象后面定理 8 系所示，有限群的表現都是完全可約的，所以我們不做这一般情况的証明，而只証明定理 6。

象在本章开始所申明的那样，表現空間 V 的基础体假定是复数体 $\boldsymbol{C}$，因此由第 1 章 §17 所示，能够于 V 导入內积 (x, y) 来考虑 V 的酉变换，即使內积不变的变换。V 的酉变换全体成为 $GL(V)$

的子群(第2章§22例7, 146頁), 用$U(V)$表示。把V作为表現空間的群G的表現ρ是自G到$GL(V)$的同态映射。特別, 它的象$\rho(G)$在$U(V)$中时, 即ρ成为自G到$U(V)$的同态映射时, ρ叫做G的(把V作为表現空間, 关于內积(x, y)的)**酉表現**。当ρ是酉表現时, 如果取V的正規直交坐标系, 那末$\rho(a)$, $a\in G$, 能够用酉矩陣$P(a)$表示(第1章§17, 102頁)。反之, 对于V的某坐标系, 表示$\rho(a)$, $a\in G$的矩陣$P(a)$如果都是酉矩陣, 那末ρ显然成为酉表現。

定理7 酉表現是完全可約的。

証明 假定ρ是酉表現, V是它的表現空間. 对于V的任意ρ的不变子空間W, 証明有滿足$V=W\oplus W'$的ρ的不变子空間W'(定理5)即可. 假定$W'=\{x'; x'\perp W\}$, 由第1章§16定理21得$V=W\oplus W'$. 又因为ρ是酉表現, 所以对于任意$x\in W$, $x'\in W'$, $a\in G$有$(x, \rho(a)(x'))=(\rho(a^{-1})(x), x')$. 因为$W$是不变子空間, 所以$\rho(a^{-1})(x)\in W$, 又因为$x'\perp W$, 所以$(\rho(a^{-1})(x), x')=0$. 于是$(x, \rho(a)(x'))=0$, 即$\rho(a)(x')\in W'$. 因此$W'$是不变子空間。

定理8 有限群的表現(关于表現空間的适当內积)是酉表現。

証明 假定G是阶为n的有限群, ρ是G的表現, V是ρ的表現空間。对于$x, y\in V$, 它的內积(x, y)是$\boldsymbol{C}$中元, 命

$$\langle x, y\rangle=\frac{1}{n}\sum_{a\in G}(\rho(a)(x), \rho(a)(y)),$$

容易驗証$\langle x, y\rangle$是V的另一个內积(驗証第1章§17的条件$U1\sim5$即可)。并且对于G的任意元b,

$$\langle\rho(b)(x), \rho(b)(y)\rangle=\frac{1}{n}\sum_{a\in G}(\rho(a)(\rho(b)(x)), \rho(a)(\rho(b)(y)))$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{a\in G}(\rho(ab)(x), \rho(ab)(y))=\langle x, y\rangle.$$

（自第二边变为第三边时，是因为 ρ 是表現，引用了 $\rho(a)\rho(b)=\rho(ab)$ 这結果。又自第三边变为第四边时，因为 G 是群，引用了对于一定的 $b\in G$，当 a 取 G 中每一元时，ab 也同样取全部 G 中元这事实）。

卽 $\rho(b)$，$b\in G$，不变内积 $\langle x, y\rangle$. 所以 ρ（关于内积 $\langle x, y\rangle$）是酉表現。

系　有限群的表現是完全可約的。

証明　由定理7及8卽得。

由这系，求有限群 G 的表現的問題归結为求 G 的所有既約表現的問題。这問題將在后面解决（参照§33）。

例1　因为可换群的旣約表現都是1級的（定理4），所以表現有限可换群的矩陣都能够变为对角綫型。

例2　求对称群 $\mathfrak{S}_3=\mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$ 的旣約表現（以后对称群 $\mathfrak{S}(\{1, 2, \cdots, n\})$ 簡单地用 $\mathfrak{S}_n$ 表示）。

［解］　一般，对于 $G=\mathfrak{S}_n$ 中元 $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}$ 使与 $\pi(\nu_1, \cdots, \nu_n)\in GL(C^n)$（29頁，例6）对应，就得到 G 的一个 n 級忠实表現 ρ. 把 C^n 的自然基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ 看成正規直交基底时，$C^n\ni x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$, $y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i$ 的内积为

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_i,$$

因为

$$(\pi(\nu_1, \cdots, \nu_n)x, \pi(\nu_1, \cdots, \nu_n)y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_{\nu_i}\bar{\eta}_{\nu_i}=(x, y),$$

所以 ρ 是酉表現。

当 $n=3$ 时，試將这表示 ρ 分解为旣約表示的直和。显然 $C^n=C^3$ 具有用 $e_1+e_2+e_3$ 生成的空間作为不变子空間，为了正規化，命

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3)=f_1,$$

如果

$$f_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,e_1-\frac{1}{\sqrt{2}}e_2-\frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right),\quad f_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_2-e_3),$$

那末 (f_1, f_2, f_3) 成为 C^3 的正規直交基底。显然 $\pi(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(f_1)=f_1$，所以 ρ

对于不变子空間 $[f_1]$ 的子表現 ρ_1 是恒等表現。因为 $[f_2, f_3]=\{x; x\perp f_1\}$，所以 $[f_2, f_3]$ 也是 C^3 的不变子空間。假如 ρ 对于这不变子空間的子表現是 ρ_2，那末 $\rho=\rho_1\oplus\rho_2$。

試求表現 ρ_2 由基底 (f_2, f_3) 的表現矩陣。

假定对换 $(1, 2)=a$，$(1, 3)=b$，因为 $G=\{e, a, b, ab, ba, aba\}$，所以，如果 $\rho_2(a)$，$\rho_2(b)$ 已知，那末 $\rho_2(ab)=\rho_2(a)\rho_2(b)$ 等也能求得。取 C^3 的自然基底，那末 $\rho(a)$，$\rho(b)$ 分別用

$$P(1\ 2)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad P(1\ 3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

表示，因为自然基底到 (f_1, f_2, f_3) 的坐标变换的矩陣是

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

所以 $\rho(a)$，$\rho(b)$ 由坐标系 (f_1, f_2, f_3) 表示的矩陣是

$$Q^{-1}P(1\ 2)Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad Q^{-1}P(1\ 3)Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

于是 $\rho_2(a)$，$\rho_2(b)$ 由 (f_2, f_3) 表示的矩陣分別为

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

因为 ρ_2 是 2 級表現，所以它是既約的。实际上，假如 ρ_2 是可約，那就不得不成为两个 1 級表現 ρ_2'，ρ_2'' 的直和。但对于 1 級表現，可换性 $\rho_2'(a)\rho_2'(b)=\rho_2'(b)\rho_2'(a)$，$\rho_2''(a)\rho_2''(b)=\rho_2''(b)\rho_2''(a)$ 成立，因此不得不 $\rho_2(a)\rho_2(b)=\rho_2(b)\rho_2(a)$，这与上面的事实不合。

$\mathfrak{S}_3$ 的既約表現，实际上，除 ρ_1, ρ_2 外还有一个交代表現 ρ_3, ρ_3 不与 ρ_1, ρ_2 中任一个等价。$\mathfrak{S}_3$ 的既約表現只有这三个，这将在后面証明（§33）。而一般全部求对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的既約表現的問題将在 §38～§41 完全解决。

§28 反步表現，張量积表現

象以前一样，假定 ρ 是群 G 的表現，V 是 ρ 的表現空間，$\hat{V}$ 是 V 的对偶空間，对于 $GL(V)$ 中元 $\rho(a)$，如果使 $GL(\hat{V})$ 中元 ${}^t\rho(a)$ 与之对应（第1章 §10），因为 ρ 是表現，所以

$$\rho(ab)=\rho(a)\rho(b),$$

但关于 ${}^t\rho$,

$${}^t\rho(ab)={}^t(\rho(a)\rho(b))={}^t\rho(b){}^t\rho(a),$$

因此，如果 G 不是可換群，那末 ${}^t\rho$ 一般不能成为 G 的表現。

又对于 $a\in G$，如果使 $\rho(a^{-1})\in GL(V)$ 对应，那就得到自 G 到 $GL(V)$ 的映射。假如它用 $\hat{\rho}$ 表示，那末

$$\hat{\rho}(ab)=\rho(b^{-1}a^{-1})=\hat{\rho}(b)\hat{\rho}(a),$$

因此 $\hat{\rho}$ 一般也不能成为 G 的表現。但是，如果命

$${}^t\hat{\rho}(a)={}^t\rho(a^{-1})=\rho^*(a),$$

那末 ρ^* 显然給出把 $\hat{V}$ 作为表現空間的 G 的表現：

$$\rho^*(ab)={}^t\rho(b^{-1}a^{-1})=\rho^*(a)\rho^*(b).$$

ρ^* 叫做 ρ 的**反步表現**。假如取 V 的坐标的对偶坐标作为 $\hat{V}$ 的坐标，那末 ρ^* 的表現矩陣 $P^*(a)$ 能够由 ρ 的表現矩陣 $P(a)$ 得出：

$$P^*(a)={}^tP(a^{-1}).$$

例1　在表現 ρ 中，$\rho(a)$, $a\in G$ 都是直交变换时，ρ 叫做**直交表現**。表現 ρ, ρ^* 对于对偶坐标系能够用相同的矩陣来表現的必要充分条件是 ρ 为直交表現。

［解］　$P^*(a)=({}^tP(a))^{-1}$。所以 $P(a)=P^*(a)\Leftrightarrow P(a){}^tP(a)=E$。因此本例显然成立。

假定 ρ_1, ρ_2 是群 G 的两个表現，它的表現空間分別是

V_1, V_2。于是，对于 $a, b \in G$，$\rho_1(a)\otimes\rho_2(a)$，$\rho_1(b)\otimes\rho_2(b)$ 都是 $V_1\otimes V_2$ 的自同构映射，但 $(\rho_1(a)\otimes\rho_2(a))\cdot(\rho_1(b)\otimes\rho_2(b))=\rho_1(a)\cdot\rho_1(b)\otimes\rho_2(a)\cdot\rho_2(b)$（第1章§20例8）。因此，如果命 $\rho_1(a)\otimes\rho_2(a)=\rho(a)$，那末 $a\to\rho(a)$ 成为把 $V_1\otimes V_2$ 作为表現空間的 G 的表現。它叫做 ρ_1，ρ_2 的**張量积表現**，写成 $\rho=\rho_1\otimes\rho_2$。

例 2　$\rho_1\otimes\rho_2$ 的級数等于 ρ_1，ρ_2 的級数的积。

例 3　假定 φ_1, φ_2 是 V_1, V_2 的坐标系，如果 $P_1(a)$，$P_2(a)$ 是对于这等坐标系表現 $\rho_1(a)$，$\rho_2(a)$ 的矩陣，象在第1章§20所看到的一样，对于 $V_1\otimes V_2$ 的坐标系 $\varphi_1\otimes\varphi_2$，$\rho_1(a)\otimes\rho_2(a)$ 能够用矩陣 $P_1(a)\otimes P_2(a)$ 表示。在这意义下，張量积表現的表現矩陣是各因子的表現矩陣的張量积。

例 4　关于表現的張量积，結合律成立，即

$$(\rho_1\otimes\rho_2)\otimes\rho_3=\rho_1\otimes(\rho_2\otimes\rho_3).$$

它簡单地写成 $\rho_1\otimes\rho_2\otimes\rho_3$。关于四个以上的表現也同样能够定义 $\rho_1\otimes\rho_2\otimes\cdots\otimes\rho_n$（参照第1章§20，命題63，128頁）。

例 5　直和表現与張量积表現之間在下面的意义下，有分配律成立（第1章§20例7，129頁）。

$$\rho_1\otimes(\rho_2\oplus\rho_3)=(\rho_1\otimes\rho_2)\oplus(\rho_1\otimes\rho_3),$$

$$(\rho_1\oplus\rho_2)\otimes\rho_3=(\rho_1\otimes\rho_3)\oplus(\rho_2\otimes\rho_3).$$

§ 29　群代数与正則表現

假定 G 是群，对于把 G 作为定义域，$\boldsymbol{C}$ 作为值域的全体函数（参照§6）的集合 $A(G)$，能够如下地构造成为 $\boldsymbol{C}$ 上代数（§7，32頁）。

首先，对于 $f, g\in A(G)$，$a\in G$，$\lambda\in\boldsymbol{C}$，由

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a),$$

$$(\lambda f)(a)=\lambda f(a),$$

定义 $f+g$，$\lambda f\in A(G)$，显然 $A(G)$ 成为 $\boldsymbol{C}$ 上向量空間（参照32頁命題5的証明）。特别，假如 G 是 n 阶有限群，那末这向量空間的維数是 n，对于 G 中各元 a，由

$$f_a(x)=\begin{cases}1, & a=x\text{ 时},\\ 0, & a\neq x\in G\text{ 时}\end{cases} \tag{29.1}$$

定义的 $A(G)$ 中 n 个元的集合 $\{f_a;\ a\in G\}$ 成为 $A(G)$ 的一个基底。实际上，任意 $f\in A(G)$ 能够写成

$$f=\sum_{a\in G}f(a)f_a, \tag{29.2}$$

反之，假如 $f=\sum_{a\in G}\lambda_a f_a$，那末 $\lambda_a=f(a)$，这由(29.1)立即明白。

其次，这基底中元 $f_a, f_b, a, b\in G$ 之間的乘法由

$$f_a\cdot f_b=f_{ab} \tag{29.3}$$

定义(在这里用了群的公理1)，于是(29.2)定义的 f 与

$$g=\sum_{a\in G}g(a)f_a \tag{29.4}$$

的积(为了使 $A(G)$ 成为代数)，就必須規定为

$$\begin{aligned}fg&=(\sum f(a)f_a)(\sum g(b)f_b)\\&=\sum_{a,\ b\in G}f(a)g(b)f_{ab}\\&=\sum_{a\in G}(\sum_{b\in G}f(ab^{-1})g(b))f_a.\end{aligned} \tag{29.5}$$

又由此規定，容易驗証 $A(G)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上代数(特別 $A(G)$ 的乘法滿足結合律，能够由 G 所滿足的群公理3导出)。这样考虑了代数构造的 $A(G)$，叫做 G **上群代数**。

再，K 是任意体时，用 K 来代替 $\boldsymbol{C}$，与上完全一样能够定义 K 上(G 上的)群代数 $A(G, K)$，这也是代数学上常用的一个概念。以下为了簡单起見，如果不加声明，群代数的基础体假定是 $\boldsymbol{C}$。

例1　f_e(e 是 G 的单位元)是 $A(G, K)$ 中乘法的单位元：$f_ef=ff_e=f$。

例2　(29.5)的右边也能够象下面这样写出：

$$\sum_{b\in G}(\sum_{a\in G}f(a)g(a^{-1}b))f_b.$$

例3　在两个代数 A, B 作为向量空間的直和中，如果由法則

$$(a_1\oplus b_1)(a_2\oplus b_2)=(a_1a_2\oplus b_1b_2)$$

导入乘法就成为代数。它叫做代数 A, B 的直和，用 $A\oplus B$ 表示。假如 G 是 4 阶循环群，$K=\boldsymbol{R}$，那末 $A(G, \boldsymbol{R})$ 与直和 $\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{C}$ 同构。

例 4 假定 G 是由八个元 $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 构成的群，它的乘法用 $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$ (1 是单位元)給出。这群叫做**四元数群** (quaternion group)。$\boldsymbol{R}$ 上 4 元数环 (33 頁) 如果是 $Q(\boldsymbol{R})$，那就能够証明 $A(G, \boldsymbol{R})$ 与 $\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}\oplus Q(\boldsymbol{R})$ 同构。

一般，在有单位元的代数 A 中，关于乘法有逆元的元叫做**正則元**。假定 A 中正則元全体的集合是 A^*，那末 A^* 关于乘法显然成群，特別由 $A(G)$ 中正則元形成的群用 $A^*(G)$ 表示。

命題 4 $f_a\in A^*(G)$.

証明 因为 $f_a f_{a^{-1}}=f_e$，所以 $f_a^{-1}=f_{a^{-1}}$. 即 f_a 有逆元 $f_{a^{-1}}$，所以它是正則元。

命題 5 对于 $a\in G$，使 $f_a\in A^*(G)$ 对应的映射 ι 是自 G 到 $A^*(G)$ 中的同构映射(同态单射)。

証明 由定义 (29.3) 自明。 (証毕)

由这命題 5 把 a 与 $\iota(a)=f_a$ 同样看待，那末 $f=\sum f(a)f_a$ 有时写成 $f=\sum f(a)a$.

例 5 假定 ρ 是 G 的任意表現，V 是它的表現空間，那末对于任意 $a\in G$，有 $\rho(a)\in\mathfrak{L}(V)$，如果把 $A(G)$ 中元 f_a 与 a 同样看待，那末，对于 $a\in A(G)$ 也能认为有 $\rho(a)\in\mathfrak{L}(V)$. 这时，对于 $A(G)$ 中任意元 $f=\sum f(a)a$，假如定义 $\rho(f)=\sum_{a\in G}f(a)\rho(a)\in\mathfrak{L}(V)$，那末 ρ 就成为自 $A(G)$ 到 $\mathfrak{L}(V)$ 作为代数的同态映射 (后面 ρ 的定义域(对于开始 ρ 的定义域 G 的) 扩張到 $A(G)$，如果不致引起混淆，一般可以用相同文字 ρ 表示)。

定理 9 假定 G 是有限群，A 是 $\boldsymbol{C}$ 上任意具有单位元的代数，如果 φ 是自 G 到 A 中正則元形成的群 A^* 的同态映射。那就存在满足下面条件的自 G 上代数 $A(G)$ 到 A 作为代数的同态映射 Φ.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & A^* \\ & {\scriptstyle\iota}\searrow & \uparrow{\scriptstyle\Phi^*} \\ & & A^*(G) \end{array}$$

假如把 Φ 到 $A^*(G)$ 的縮小作为 Φ^*，則

$$\varphi = \Phi^* \circ \iota. \tag{29.6}$$

証明　Φ 象下面这样构造卽可。因为$\{f_a; a\in G\}$是$A(G)$的基底，所以$\Phi(f_a)\in A$可以任意規定，如果，对于$f=\sum f(a)f_a$，使$\Phi(f)=\sum f(a)\cdot\Phi(f_a)$对应，那就得到自$A(G)$到$A$作为向量空間的同态映射。这时，假如$\Phi(fg)=\Phi(f)\Phi(g)$，那末$\Phi$也給出作为代数的同态。这容易理解，只要关于基底$\Phi(f_a)$，$\Phi(f_b)$，…之間乘法的同态关系

$$\Phi(f_a)\Phi(f_b)=\Phi(f_{ab}) \tag{29.7}$$

成立就可以。現在命$\Phi(f_a)=\varphi(a)$，由φ是同态映射的假定，(29.7)成立是显然的。又因为$f_a=\iota(a)$，所以(29.6)也当然成立。　　　　(証毕)

当G的阶是n时，$A(G)$是$\boldsymbol{C}$上的n維向量空間，对于$a\in G$，$f\in A(G)$，假如由[1]

$$(\rho(a)f)(x)=f(a^{-1}x),$$
$$(\sigma(a)f)(x)=f(xa)$$

定义$\rho(a):A(G)\to A(G)$，$\sigma(a):A(G)\to A(G)$，显然$\rho(a)$，$\sigma(a)\in\mathfrak{L}(A(G))$，并且

$$(\rho(a)\rho(b^{-1})f)(x)=(\rho(b^{-1})f)(a^{-1}x)=f(ba^{-1}x),$$
$$(\rho(ab^{-1})f)(x)=f((ab^{-1})^{-1}x)=f(ba^{-1}x).$$

于是$\rho(a)\rho(b^{-1})=\rho(ab^{-1})$，所以$\rho$成为把$A(G)$作为表現空間的$G$的表現。同样$\sigma$也成为把$A(G)$作为表現空間的$G$的另一表現。$\rho$叫做$G$的**左正則表現**，$\sigma$叫做$G$的**右正則表現**。

定理10　有限群G的左正則表現ρ与右正則表現σ同是忠实表現，并且是相互等价的。

---

[1] $\rho(a)f$的定义不是把$a^{-1}x$代入$f(x)$中的x作为$(\rho(a)f)(x)$，而是"$\rho(a)f$在x的值等于f在$a^{-1}x$的値"这个意义，象后面所看到的变形$(\rho(a)f)(bx)=f(a^{-1}bx)$那样。关于$\sigma$也是同样。

証明 假定 $\rho(a)=e_{A(G)}$，那末对于任意 $f\in A(G)$ 有 $f(a^{-1}x)=f(x)$。如果 $a\neq e$，取 f_e 作为 f，a 作为 x，就产生 $1=0$ 这样的矛盾，所以 $a=e$。即 $\operatorname{Ker}\rho=\{e\}$。因此 ρ 是忠实的。关于 σ 也是同样。

$$\begin{array}{ccc} A(G) & \xrightarrow{\rho(a)} & A(G) \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ A(G) & \xrightarrow[\sigma(a)]{} & A(G) \end{array}$$

其次，为了証明 ρ，σ 等价，用

$$\pi f(x)=f(x^{-1})$$

定义
$$\pi:\quad A(G)\to A(G).$$

显然 π 是同构映射。这时由上面的图可見它更是可换的，即

$$\pi\circ\rho(a)=\sigma(a)\circ\pi. \tag{29.8}$$

实际上，

$$(\pi\circ\rho(a)f)(x)=(\pi(\rho(a)f))(x)=(\rho(a)f)(x^{-1})=f(a^{-1}x^{-1}),$$

$$\begin{aligned}((\sigma(a)\circ\pi)f)(x)&=(\sigma(a)(\pi f))(x)\\ &=(\pi f)(xa)=f((xa^{-1}))=f(a^{-1}x^{-1}),\end{aligned}$$

因此 $\rho\sim\sigma$。

例 6 依照命题 5，如果把 f_x 写成 x，那末 $\{e, a, b, \cdots, x, \cdots\}$ 成为 $A(G)$ 的基底。显然 $\rho(a)f_x=f_{ax}$❶，所以用这基底时，表示 $\rho(a)$ 的矩陣是表示排列 $\begin{pmatrix} e & a & b & \cdots & x & \cdots \\ a^{-1} & e & a^{-1}b & \cdots & a^{-1}x & \cdots\end{pmatrix}$ 的 n 級矩陣 (37 頁)。同样，$\sigma(a)$ 能够用表示排列 $\begin{pmatrix} e & a & b & \cdots & x & \cdots \\ e & a^2 & ba & \cdots & xa & \cdots\end{pmatrix}$ 的矩陣表現。又，上面的 $\pi\in\mathfrak{L}(A(G), A(G))$，能够用表示排列 $\begin{pmatrix} e & a & b & \cdots & x & \cdots \\ e & a^{-1} & b^{-1} & \cdots & x^{-1} & \cdots\end{pmatrix}$ 的矩陣表現，这些排列（或表示它的矩陣）簡单地分别用 $\begin{pmatrix} x \\ a^{-1}x\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x \\ xa\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x \\ x^{-1}\end{pmatrix}$ 表示。(上面的 (29.8) 用这記法意味着

$$\begin{pmatrix} x \\ x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ a^{-1}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ xa\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x^{-1}\end{pmatrix},$$

这也容易直接証明。)

---

❶ 因为 $(\rho(a)f_x)(y)=f_x(a^{-1}y)=\begin{cases}1, & 当\ y=ax\\ 0, & 当\ y\neq ax\end{cases}$ 而 $f_{ax}(y)=\begin{cases}1, & 当\ y=ax\\ 0, & 当\ y\neq ax\end{cases}$ 所以 $\rho(a)f_x=f_{ax}$。—— 譯者注

$$\begin{array}{|cccccc|}
e & a^{-1} & b^{-1} & \cdots & x^{-1} & \cdots \\
a & e & ab^{-1} & \cdots & ax^{-1} & \cdots \\
b & ba^{-1} & e & \cdots & bx^{-1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
x & xa^{-1} & xb^{-1} & \cdots & e & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{|cccccc|}
e & a^{-1} & b^{-1} & \cdots & x^{-1} & \cdots \\
a & e & b^{-1}a & \cdots & x^{-1}a & \cdots \\
b & a^{-1}b & e & \cdots & x^{-1}b & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
x & a^{-1}x & b^{-1}x & \cdots & e & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\end{array}$$

(b)

上面由群 G 中元形成的 (a), (b) 那样的表叫做 G 的**群表**, (a) 叫做**左群表**, (b) 叫做**右群表**。(也可以說是群 G 的乘法表。) 表示 $\rho(a)$ 的矩陣在左表中命 a 的地方为 1, 其他地方为 0 即得❶。表示 $\sigma(a)$ 的矩陣在右表中命 a^{-1} 的地方为 1, 其他地方为 0 即得。

例 7 取例 6 的基底时, n 阶循环群的正則表現为下面的矩陣形式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}_{n}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{n}, \quad \cdots, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{n}$$

(在可換群, 左右正則表現一致)。

例 8 3 阶对称群的正則表現。

[解] 命 $a=(1\ 2)$, $b=(1\ 3)$, 那末 $\mathfrak{S}_3=\{e, a, b, ab, ba, aba\}$.

左 群 表

	a^{-1}	b^{-1}	$(ab)^{-1}$	$(ba)^{-1}$	$(aba)^{-1}$
	∥	∥	∥	∥	∥
e	a	b	ba	ab	aba
a	e	ab	aba	b	ba
b	ba	e	a	aba	ab
ab	aba	a	e	ba	b
ba	b	aba	ab	e	a
aba	ab	ba	b	a	e

右 群 表

	a^{-1}	b^{-1}	$(ab)^{-1}$	$(ba)^{-1}$	$(aba)^{-1}$
	∥	∥	∥	∥	∥
e	a	b	ba	ab	aba
a	e	ba	b	aba	ab
b	ab	e	aba	a	ba
ab	b	aba	e	ba	a
ba	aba	a	ab	e	b
aba	ba	ab	a	b	e

❶ 因为表示排列 $\pi=\begin{pmatrix} e & a & b & \cdots & x & \cdots \\ a^{-1} & e & a^{-1}b & \cdots & a^{-1}x & \cdots \end{pmatrix}$ 的矩陣是分别以 $e, a, b, \cdots, x, \cdots$ 为行数, $a^{-1}, e, a^{-1}b, \cdots, a^{-1}x, \cdots$ 为列数的元是 1 其他元为 0 的矩陣。今假定 $a^{-1}x=y$, 那末在 x 行 y 列的元就应該換成 1. 但当 $a^{-1}x=y$ 时, $xy^{-1}=a$. 反之, 假如 $xy^{-1}=a$, 那末 $a^{-1}x=y$, 这就是說把 $a^{-1}x$ 換为 1 与把 xy^{-1} 換为 1 是一回事。所以在 (a) 中命 a 所在的地方为 1, 其他为 0 所得的矩陣就是表示排列的矩陣。——譯者注

左正則表現(依順序表示 e, a, b, ab, ba, aba)

$$\begin{pmatrix} 1&&&&& \\ &1&&&& \\ &&1&&& \\ &&&1&& \\ &&&&1& \\ &&&&&1 \end{pmatrix},\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} &1&&&& \\ 1&&&&& \\ \hline &&&1&& \\ &&1&&& \\ \hline &&&&&1 \\ &&&&1& \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} &&1&&& \\ &&&&1& \\ \hline 1&&&&& \\ &&&&&1 \\ \hline &1&&&& \\ &&&1&& \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} &&&&1& \\ &&1&&& \\ \hline &&&&&1 \\ 1&&&&& \\ \hline &&&1&& \\ &1&&&& \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} &&&1&& \\ &&&&&1 \\ \hline &1&&&& \\ &&&&1& \\ \hline 1&&&&& \\ &&1&&& \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} &&&&&1 \\ &&&1&& \\ \hline &&&&1& \\ &1&&&& \\ \hline &&1&&& \\ 1&&&&& \end{array}\right)$$

(空白部分都是 0)。

右正則表現(同上)

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1&&&&& \\ &1&&&& \\ \hline &&1&&& \\ &&&1&& \\ \hline &&&&1& \\ &&&&&1 \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} &1&&&& \\ 1&&&&& \\ \hline &&&&1& \\ &&&&&1 \\ \hline &&1&&& \\ &&&1&& \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} &&1&&& \\ &&&1&& \\ \hline 1&&&&& \\ &1&&&& \\ \hline &&&&&1 \\ &&&&1& \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} &&&1&& \\ &&1&&& \\ \hline &&&&&1 \\ &&&&1& \\ \hline 1&&&&& \\ &1&&&& \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} &&&&1& \\ &&&&&1 \\ \hline &1&&&& \\ 1&&&&& \\ \hline &&&1&& \\ &&1&&& \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} &&&&&1 \\ &&&&1& \\ \hline &&&1&& \\ &&1&&& \\ \hline &1&&&& \\ 1&&&&& \end{array}\right).$$

例 9 上面的$\begin{pmatrix} x \\ a^{-1}x \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} x \\ xa \end{pmatrix}$可以看成为 G 中 n 个元的置換(133 頁)，当 a 在 G 中变动时，这种置換成为与 G 同构的群。一般自群 G 到有限集合 S 的对称群 $\mathfrak{S}(S)$ 中的同态映射，叫做 G **由置換群的表現**。左右正則表現是由置換群表現的例。假定 H 是 G 的任意子群，如果，命 G 中 H 的剩余类的集合 $\{xH;\ x\in G\}=S$，那末，对于 $a\in G$，使$\begin{pmatrix} xH \\ axH \end{pmatrix}\in\mathfrak{S}(S)$对应，又得到 G 由置換群的表現。又关于 H 的右剩余类的集合 $\{Hx;\ x\in G\}$，对于 a 使与$\begin{pmatrix} Hx \\ Hxa^{-1} \end{pmatrix}$对应也得到 G 由置換群的表現(当 $H=\{e\}$ 时，就得到左右正則表現)。可以証明 G 由置換群的表現都能够象这样得到❶。例如，假定

❶ 参看 H. Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie, p.33, §2.——譯者注

$G=\mathfrak{S}_3$，如果 $H=G$，当然是恒等表現；如果 $H=\{1, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$，那就是交代表現；如果 $H=\{1, (1\,2)\}$，就得到下面的表現：

$$e\leftrightarrow\begin{pmatrix}H & H_1 & H_2\\ H & H_1 & H_2\end{pmatrix}=E,\ a\leftrightarrow(H_1\ H_2),\ b\leftrightarrow(H\ H_1),$$

$$ab\leftrightarrow(H\ H_2\ H_1),\ ba\leftrightarrow(H\ H_1\ H_2),\ aba\to(H\ H_2),$$

这里 $$H_1=bH=\{b, ba\},\ H_2=abH=\{ab, aba\}.$$

§30　內自同构与伴随表現

假定对于群 G 中元 x，使 axa^{-1} (但 $a\in G$) 与之对应(自 G 到 G 的)的映射用 φ_a 表示，显然

$$\varphi_a(x)\varphi_a(y)^{-1}=\varphi_a(xy^{-1}),\tag{30.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_e(x)&=x,\\ \varphi_a\circ\varphi_b(x)&=\varphi_{ab}(x),\\ \varphi_{a^{-1}}(x)&=\varphi_a^{-1}(x).\end{aligned}\right\}\tag{30.2}$$

其中(30.1)表示 φ_a 是自 G 到它自身的同构映射，即 G 的自同构。G 的自同构全体成为 G 的自同构群(146 頁，例 4)。表为 $\mathfrak{A}(G)$。(30.2) 表示 $\{\varphi_a; a\in G\}=\mathfrak{A}_0(G)$ 成为 $\mathfrak{A}(G)$ 的子群，叫做 G 的**內自同构群**，它的元 φ_a 叫做 G 的**內自同构**。(与此相应，$\mathfrak{A}(G)-\mathfrak{A}_0(G)$ 中元叫做 G 的**外自同构**。)

假如对于 $x, y\in G$，存在使 $\varphi_a(x)=y$ 成立的 $a\in G$ 时，写成 $x\sim y$，显然 $\sim$ 是等价关系。当 $x\sim y$ 时，x，y 叫做属于在 G 的**同类(或共轭类)**。$\{y:x\sim y\}$ 叫做 x 的类，用 $C(x)$ 表示。

例 1　单位元 e 的类只由一个 e 构成。可换群中各元形成只含它自身的类。

命題 6　$C(x)$ 只由一个元 $\{x\}$ 构成的这样的 G 中元 x 是与 G 中所有元可换。又它的逆也成立。这种元全体的集合成为 G 的可换正規子群(这个正規子群叫做 G 的**中心**)。

証明　$C(x)=\{x\}$ 与对于任意 $a\in G$，$axa^{-1}=x$ 即 $ax=xa$ 等

价。又这种元构成 G 的子群 Z 由下面关系容易明白：

(i) 对于任意 $a\in G$，$ae=ea$。

(ii) 假如 $ax=xa$，$ay=ya$，那末 $axy=xay=xya$。

(iii) 假如 $ax=xa$，那末 $xa^{-1}=a^{-1}x$。

因为 Z 中元与 G 中所有元可换，所以 Z 显然是 G 的可换正规子群。

例 2 $G=\mathfrak{S}_3$ 的中心只由单位元 e 构成。把 G 用上面的意义来类别就得到

$$\{1\},\ \{(1\ 2),\ (2\ 3),\ (3\ 1)\},\ \{(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}.$$

例 3 对称群的类别。

在上例2中，已把 $\mathfrak{S}_3$ 类别，现在一般来考虑类别 $\mathfrak{S}_n$。

$\mathfrak{S}_n$ 中元 $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}$ 能够表为不含共同文字的循环置换的乘积。譬如假定 $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&4&3&5&2\end{pmatrix}$，那末 $\pi=(1\ 6\ 2)(3\ 4)(5)$（一般，能够用关于 n 的数学归纳法证明）。这些循环置换显然是可换的，π 象这样的"分解"，除因子的顺序外是唯一确定的。假定这些循环置换的个数是 $k=k(\pi)$，次数（r 个文字的循环置换叫做**次数** r）分别是 $r_1(\pi)$, $r_2(\pi)$, $\cdots$, $r_k(\pi)$ $(r_1(\pi)\geqslant\cdots\geqslant r_k(\pi))$，那末

$$\pi\sim\pi'\Leftrightarrow k(\pi)=k(\pi'),\ r_1(\pi)=r_1(\pi'),\ \cdots,\ r_k(\pi)=r_k(\pi'). \quad (30.3)$$

实际上，假如 $\pi=\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\ \nu_1&\cdots&\nu_n\end{pmatrix}$，如果 $\pi\sim\pi'$，因为由134页例2能够表 $\pi'=\begin{pmatrix}\mu_1&\cdots&\mu_n\\ \mu_{\nu_1}&\cdots&\mu_{\nu_n}\end{pmatrix}$，所以在 π 的分解中命 μ_i 代替 i，就得到 π' 的分解。反之，假如 $k(\pi)=k(\pi')$，$r_j(\pi)=r_j(\pi')$，$j=1$, $\cdots$, k，如果在 π, π' 分解中对应位置的数字分别作为 i, μ_i，命 $\varkappa=\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\ \mu_1&\cdots&\mu_n\end{pmatrix}$，那末 $\pi'=\varkappa\pi\varkappa^{-1}$。

$I(\pi)=(r_1(\pi),\ \cdots,\ r_k(\pi))$ 叫做 π 的**不变系**，由 (30.3)，π 的类由它的不变系决定。所以 $\mathfrak{S}_n$ 的类的个数等于不定方程式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\quad x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant 0$$

中整数解的个数。

假定 i 是 $1\leqslant i\leqslant n$ 的整数，$r_1(\pi)$, $\cdots$, $r_k(\pi)$ 中等于 i 的数的个数是

$\lambda_i(\pi)$，那末由

$$J(\pi)=(\lambda_1(\pi),\cdots,\lambda_n(\pi))$$

能够决定 $I(\pi)$，所以 π 的类由 $J(\pi)$ 确定。这时显然

$$\lambda_1(\pi)+2\lambda_2(\pi)+\cdots+n\lambda_n(\pi)=n.$$

又假如 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是满足 $\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n$ 的非負整数，那末滿足 $J(\pi)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 的 π 存在，象这样的 π 的个数 $n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 由

$$n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}\lambda_k!\,k^{\lambda_k}}$$

給出。这是因为对于 n 个文字的任意排列，由于引入如下的括弧

$$\underbrace{(\nu_1)(\nu_2)\cdots(\nu_{\lambda_1})}_{\lambda_1\text{个}}\underbrace{(\nu_{\lambda_1+1}\,\nu_{\lambda_1+2})\cdots(\nu_{\lambda_1+2\lambda_2-1}\,\nu_{\lambda_1+2\lambda_2})}_{\lambda_2\text{个}}\cdots$$

能够得到属于这种不变系的 π，其中由于長相同的循环置换的排列有 $\prod_{k=1}^{n}\lambda_k!$ 个，且由于在一个循环置换中把文字循环互换的排列 $\prod_{k=1}^{n}k^{\lambda_k}$ 个都給出相同的置换。

5 次以下对称群的共軛类揭示如表：

群	类的記号	不变系 $I(C)$	$J(C)$	代 表 元	元数 $n(C)$
$\mathfrak{S}_2$	C_1	(1, 1)	(2, 0)	1	1
	C_2	(2)	(0, 1)	(1 2)	1
$\mathfrak{S}_3$	C_1	(1, 1, 1)	(3, 0, 0)	1	1
	C_2	(2, 1)	(1, 1, 0)	(1 2)	3
	C_3	(3)	(0, 0, 1)	(1 2 3)	2
$\mathfrak{S}_4$	C_1	(1, 1, 1, 1)	(4, 0, 0, 0)	1	1
	C_2	(2, 1, 1)	(2, 1, 0, 0)	(1 2)	6
	C_3	(2, 2)	(0, 2, 0, 0)	(1 2) (3 4)	3
	C_4	(3, 1)	(1, 0, 1, 0)	(1 2 3)	8
	C_5	(4)	(0, 0, 0, 1)	(1 2 3 4)	6
$\mathfrak{S}_5$	C_1	(1, 1, 1, 1, 1)	(5, 0, 0, 0, 0)	1	1
	C_2	(2, 1, 1, 1)	(3, 1, 0, 0, 0)	(1 2)	10
	C_3	(2, 2, 1)	(1, 2, 0, 0, 0)	(1 2) (3 4)	15
	C_4	(3, 1, 1)	(2, 0, 1, 0, 0)	(1 2 3)	20
	C_5	(3, 2)	(0, 1, 1, 0, 0)	(1 2 3) (4 5)	20
	C_6	(4, 1)	(1, 0, 0, 1, 0)	(1 2 3 4)	30
	C_7	(5)	(0, 0, 0, 0, 1)	(1 2 3 4 5)	24

命题7 G中属于同一共軛类中元的个数等于 G 的阶的約数。

这命题的証明要引用"正規化群"的概念。假定 M 是 G 的任意子集合，容易得知 G 中与 M (作为全体)可換的元全体的集合 $\{x;\ xM=Mx\}$ 成为 G 的子群。它叫做(在 G) M 的**正規化群**(normalizer)，用 $N(M)$ 表示(假如 M 是 G 的正規子群，那末 $G=N(M)$．又假如 M 是 G 的任意子群，那末 M 是 $N(M)$ 的正規子群。因此有这名称)。

显然因为

$$xMx^{-1}=M \Leftrightarrow xM=Mx \Leftrightarrow x\in N(M),$$

更一般

$$xMx^{-1}=yMy^{-1}\Leftrightarrow y^{-1}xM=My^{-1}x$$
$$\Leftrightarrow y^{-1}x\in N(M)\Leftrightarrow xN(M)=yN(M),$$

所以它与 x, y 属于关于 $\bmod N(M)$ 的同一左剩余类等价。于是当 x 取 G 中任意元时，xMx^{-1} 形状的 G 子集合的个数等于 G 中关于 $\bmod N(M)$ 的左剩余类的个数，卽 $(G:N(M))$，它当然是 $(G:\{e\})=n$ 的約数。

特別，考虑 M 只由一个 G 元 a 构成的情形：$M=\{a\}$．这时 xMx^{-1} 也只由一个元 xax^{-1} 构成。于是当 x 取 G 中元时，能够成为 xax^{-1} 的不外是与 a 共軛的元。它的个数因为是 $M=\{a\}$ 的正規化群 $N(a)$ 的指数，所以是 n 的約数(命題7証毕)。

把群代数 $A(G)$ 作为表現空間，能够作成象下面这样异于正則表現的表現。卽假如对于 $A(G)$ 的基底 $f_x\in A(G)$，使 $f_{\varphi_a(x)}$ 对应的 $\mathfrak{L}(A(G))$ 中元作为 $\tau(a)$，来考虑对于 $a\in G$ 使 $\tau(a)\in GL(A(G))$ 的对应 $\tau:G\to GL(A(G))$．显然 τ 成为 G 的表現，它叫做 G 的**伴随表現**。伴随表現的核 $\tau^{-1}(e)$ 是G 的中心。

例4 $\mathfrak{S}(\{1,2,3\})$ 的伴随表現

f_x	e	a	b	ab	ba	aba
$\tau(e)f_x$	e	a	b	ab	ba	aba
$\tau(a)f_x$	e	a	aba	ba	ab	b
$\tau(b)f_x$	e	aba	b	ba	ab	a
$\tau(ab)f_x$	e	b	aba	ab	ba	a
$\tau(ba)f_x$	e	aba	a	ab	ba	b
$\tau(aba)f_x$	e	b	a	ba	ab	aba

e, a, b, ab, ba, aba 分别用下面的矩陣表示

$$
\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& 1 \end{pmatrix},\
\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ \hline &&&&& 1 \\ &&&& 1 & \\ \hline &&& 1 && \\ && 1 &&& \end{array}\right),\
\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 &&&&& \\ &&&&& 1 \\ \hline && 1 &&& \\ &&&& 1 & \\ \hline &&& 1 && \\ & 1 &&&& \end{array}\right),\
\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 &&&&& \\ &&&&& 1 \\ \hline & 1 &&&& \\ &&& 1 && \\ \hline &&&& 1 & \\ && 1 &&& \end{array}\right),
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 &&&&& \\ && 1 &&& \\ \hline &&&&& 1 \\ &&& 1 && \\ \hline &&&& 1 & \\ & 1 &&&& \end{array}\right),\
\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 &&&&& \\ && 1 &&& \\ \hline & 1 &&&& \\ &&&& 1 & \\ \hline &&& 1 && \\ &&&&& 1 \end{array}\right).
$$

§31　直交关系

由 Schur 引理能够导出下面的基本定理。

$$
\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1(a)} & V_1 \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_2(a)]{} & V_2 \end{array}
$$

定理 11　假定 ρ_1, ρ_2 是有限群 G 的两个既約表現，V_1, V_2 分别是 ρ_1, ρ_2 的表現空間，ψ 是自 V_1 到 V_2 的綫性映射，这时如果

$$\varphi=\sum_{a\in G}\rho_2(a)\circ\psi\circ\rho_1(a^{-1}),\tag{31.1}$$

那末 φ 成为自 V_1 到 V_2 的綫性映射，假如 $\rho_1\not\sim\rho_2$，那末 $\varphi=0$。又假如 $\rho_1\sim\rho_2$，如果 $\dim V_1=\dim V_2=m$，G 的阶 $=n$，把 $x\in V_1$ 与 $\psi(x)\in V_2$，$\rho_1(a)$ 与 $\rho_2(a)$ 同样看待，那末 $\varphi=\dfrac{n}{m}S(\psi)$。

这里 $S(\psi)$ 的意义如下。假如取 V_1 的任意坐标系，ψ 就能够

用矩陣表示。这矩陣的迹(75 頁例 3)与坐标系的取法无关。因此这迹就用 $S(\psi)$ 表示(参照 76 頁)。

証明 由 (31.1) 立即得到

$$\varphi\circ\rho_1(a)=\rho_2(a)\circ\varphi,$$

所以,假如不是 $\rho_1\sim\rho_2$,由 Schur 引理的系,$\varphi=0$. 当 $\rho_1\sim\rho_2$ 时,如果把 $x\in V_1$ 与 $\psi(x)\in V_2$, $\rho_1(a)$ 与 $\rho_2(a)$ 同样看待,那末由定理 3 系 1, $\varphi=\alpha\in \boldsymbol{C}$. 取这式两边的迹,即得

$$m\alpha=S(\varphi)=\sum S(\rho_1(a)\circ\psi\circ\rho_1(a^{-1}))=\sum S(\psi)=nS(\psi).$$

所以 $$\alpha=\frac{n}{m}S(\psi).$$ (証毕)

于是把 φ 特殊化,即得下面的定理。

定理 12 对于有限群 G 的两个既約矩陣表現 $A(x)=(a_{ij}(x))$, $B(x)=(b_{kl}(x))$, 下面的关系成立:

如果不是 $A\sim B$,

$$\sum_{x\in G}a_{ij}(x)b_{kl}(x^{-1})=0, \tag{31.2}$$

如果 $A\sim B$, 它的次数是 m, G 的阶是 n,

$$\sum_{x\in G}a_{ij}(x)b_{kl}(x^{-1})=\frac{n}{m}\delta_{jk}\delta_{il}. \tag{31.3}$$

証明 假定 A, B 分别是 G 的既約表現 ρ_1, ρ_2 的矩陣表現,它們的表現空間是 V_1, V_2. 如果在 V_1, V_2 分别取适当的坐标系, $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ 能够分别用矩陣 $A(x)$, $B(x)$ 表示。現在,以这坐标系作为定理 11 中的 ψ,取关于这坐标系,用 § 8 命題 10 証明中(39 頁)的矩陣 E_{jk} 所表示的綫性映射。然后把定理 11 的結果改写,就立即得到(31.2),(31.3)。

系 1 假定把 a_{ij}, b_{kl} 考虑为对于"变数" $x\in G$, 値取 $\boldsymbol{C}$ 中 $a_{ij}(x)$, $b_{kl}(x)$ 数的 $A(G)$ 中元,那末在 $A(G)$ 中,乘法(§ 29)的意义如下:

如果不是 $A\sim B$，

$$b_{kl}\cdot a_{ij}=0, \tag{31.4}$$ ❶

一般

$$a_{kl}\cdot a_{ij}=\frac{n}{m}\delta_{li}a_{kj}. \tag{31.5}$$ ❶

(31.2)，(31.3)，(31.4)，(31.5) 叫做既約表現的**直交关系**。

又对于 $f,\ g\in A(G)$，如果

$$(f,\ g)=\frac{1}{n}\sum_{a\in G}f(a)\overline{g(a)}, \tag{31.6}$$

那末 $(f,\ g)$ 显然滿足 §17 中 U 1～5，因此 $A(G)$ 成为具有这种"内积"的酉空間。

由 §27 定理 8，有限群 G 的任意表現 ρ，与酉表現等价。因此适当地取表現空間 V 的基底它能够用酉矩陣 $P(a)=(p_{ij}(a))$ 表示。因为 $P(a)$ 是酉矩陣，所以

$${}^t\overline{P(a)}=P(a^{-1}).$$

---

❶ 关于 (31.4)，(31.5) 两式，我們只要証明 (31.5)，至于 (31.4) 可以同样推出。由 $A(G)$ 的乘法定义得

$$a_{kl}=a_{ij}=\sum_{x\in G}\left[\sum_{y\in G}a_{kl}(xy^{-1})a_{ij}(y)\right]f_x,$$

$$a_{kj}=\sum_{x\in G}a_{kj}(x)f_x.$$

因此只須証明

$$\sum_{y\in G}a_{kl}(xy^{-1})a_{ij}(y)=\frac{n}{m}\delta_{li}\cdot a_{kj}(x) \tag{1}$$

即可，为此我們在

$$D=\sum_{y\in G}A(y^{-1})CA(y)$$

中假定 C 是具有 l 行 i 列的元为 1 其余的元都等于零的矩陣，那末

$$\frac{n}{m}\delta_{li}\cdot E=\sum A(y^{-1})CA(y)$$

成立（把定理 12 的証明用矩陣表示即得）。

由所取的 C 将上式用矩陣元即得

$$\frac{n}{m}\delta_{li}(a_{kj}(x))=\sum_{y\in G}a_{kl}(xy^{-1})a_{ij}(y).$$

比較两边矩陣的元素即得 (1) 式。——譯者注

于是 p_{ij}: $a \to p_{ij}(a)$ 能够看成为 $A(G)$ 中元。如果引用(31.6)的內积(由于 ${}^t\overline{P(a)} = P(a^{-1})$) 上系能够改写如下

系 2 假定 ρ_1, ρ_2 是有限群 G 的两个旣約表現, $P_1 = (p_{ij}^{(1)})$ 及 $P_2 = (p_{kl}^{(2)})$ 是它們用酉矩陣的表現,那末在 (31.6) 内积的意义下,

$$(p_{ij}^{(1)}, p_{kl}^{(2)}) = \begin{cases} 0, & \rho_1 \not\sim \rho_2, \\ \frac{1}{m} \delta_{ik} \delta_{jl}, & \rho_1 \sim \rho_2 \ (m \text{ 是 } \rho_1, \rho_2 \text{ 的級数})。\end{cases}$$

由这系更导出下面的重要事实。

定理 13 (Burnside) 假定 $P = (p_{ij})$ 是有限群 G 由 m 級矩陣的旣約表現,那末 m^2 个 $A(G)$ 中元 p_{ij} 在 $\boldsymbol{C}$ 上是綫性无关的。又假如 $Q = (q_{kl})$ 是 G 的 m' 級旣約矩陣表現且与 P 不等价,那末 $m^2 + m'^2$ 个 $A(G)$ 中元 p_{ij}, q_{kl} 在 $\boldsymbol{C}$ 上是綫性无关的。

証明 因为 $P(a)$ 能够用(与 a 无关系) m 級正則矩陣 T 变換为酉矩陣 $P_0(a)$: $T^{-1}P(a)T = P_0(a)$. 如果 $P_0(a) = (p_{ij}^0(a))$,那末 $p_{ij}^0(a)$ 成为 $p_{ij}(a)$, $i, j = 1, \cdots, m$ 的綫性組合。反之,因为 $P(a) = TP_0(a)T^{-1}$, 所以 $p_{ij}(a)$ 成为 $p_{ij}^0(a)$, $i, j = 1, \cdots, m$ 的綫性組合。因此 $[p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{mm}] = [p_{11}^0, p_{12}^0, \cdots, p_{mm}^0]$. 所謂 $p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{mm}$ 是綫性无关,意味着 $A(G)$ 的子空間 $[p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{mm}]$ 的維数是 m^2. 因为此时說成 $\dim[p_{11}^0, p_{12}^0, \cdots, p_{mm}^0] = m^2$ 也可,所以自开始卽假令 P 是酉表現并不失一般性。这时由前定理的系 2,

$$(p_{ij}, p_{kl}) = \frac{1}{m} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

卽 $p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{mm}$ 成为在 $A(G)$ 的直交系。因此由 96 頁命題 48 的系 1, 它們是綫性无关的。后半段也能够同样証明。

§32 特 征 标

假定 ρ 是有限群 G 的 m 級表現, 对于 $a \in G$, 使 $\rho(a)$ 的迹

(76頁) $S(\rho(a))$ 对应的函数用 $\chi_\rho(a)$ 表示。χ_ρ 能够看成为 $A(G)$ 中元，χ_ρ 叫做 ρ 的**特征标**。

例1　$\chi_\rho(e)=(\rho$ 的級数)。

例2　正則表現 ρ 的特征标。如果 $a\neq e$，那末 $\chi_\rho(a)=0$。

［解］　在左正則表現，表示 $\rho(a)$ 的矩陣是表示排列 $\begin{pmatrix} x \\ a^{-1}x \end{pmatrix}$ 的矩陣，假如 $a\neq e$，那末 $x\neq a^{-1}x$。因此，这矩陣主对角綫上元素都是 0。所以 $\chi_\rho(a)=0$。关于右正則表現也是同样。

特别，假如 ρ 是既約，那末 χ_ρ **叫做单純特征标**。由定理 8 系，有限群 G 的任意表現 ρ，能够表为既約表現 $\rho_1, \cdots, \rho_r$ 的直和 $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$。这时由 §14 命題 39，立即得到

$$\chi_\rho=\chi_{\rho_1}+\cdots+\chi_{\rho_r}.$$

于是得到下面的命題。

命題 8　有限群的任意表現的特征标能够表为单純特征标的和。

例3　在可换群，因为既約表現是 1 級的，所以它的特征标与表現自身一致。即假如 $\chi=\chi_\rho$ 是可换群 G 的单純特征标，那末对于 $x, y\in G$ 有 $\chi(x)=\rho(x)$（詳細点說即意味着 $\chi(x)e=\rho(x)$）。又 $\chi(xy^{-1})=\chi(x)\chi(y)^{-1}$。更假如 G 是有限群，那末 x 的阶 m 有限（G 的阶 n 的約数），因为 $x^m=e$，所以 $\chi(x)$ 是 1 的 m 乘根（因此是 n 乘根）。

例4　一般，假定 G 是有限群（阶 n），$x\in G$，m 是 x 的阶，如果 ρ 是 G 的表現，P 是它的矩陣表現，那末 $\chi_\rho(x)=S(P(x))$。但 $x^m=e$，所以 $(P(x))^m=E$，因此矩陣 $P(x)$ 滿足方程 $X^m=E$，于是 $P(x)$ 的特征值成为 1 的 m 乘根（因而是 n 乘根）。（假如 (r, r) 型矩陣 X 的特征值是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$，如果改成 Jordan 标准形来看就容易得知，$X^m$ 的特征值是 $\alpha_1^m, \cdots, \alpha_r^m$。因此，如果 $X^m=E$，那末 $\alpha_i^m=1$。）所以 $\chi_\rho(x)$ 所取的值都是 1 的 n 乘根的和。

在上面曾引用 76 頁命題 38 的系及命題 39 的

(i)　$S(TFT^{-1})=S(F)$,

(ii)　$S(F_1\oplus F_2)=S(F_1)+S(F_2)$

作为迹的性质，再又有

(iii) 当 $F_1 \in \mathfrak{M}(m_1, \boldsymbol{C})$, $F_2 \in \mathfrak{M}(m_2, \boldsymbol{C})$ 时,

$$S(F_1 \otimes F_2) = S(F_1) \cdot S(F_2).$$

它又能够象下面那样表示:

假如 $F_1 = (a_{ij})$, $F_2 = (b_{kl})$, 那末

$$S(F_1 \otimes F_2) = \sum_{i,k} a_{ii} b_{kk} = S(F_1) \cdot S(F_2).$$

引用这些性质立即得到下面的命题:

命题 9 (i) 假定 $\rho_1 \sim \rho_2$, 那末 $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

(ii) $\chi_\rho(a) = \chi_\rho(bab^{-1})$, $a, b \in G$.

(iii) $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2}(a) = \chi_{\rho_1}(a) + \chi_{\rho_2}(a)$.

(iv) $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(a) = \chi_{\rho_1}(a) \chi_{\rho_2}(a)$.

更由定理 12 的系 2, 得

定理 14 假定 ρ_1, ρ_2 是既約表現,那末

$$(\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}) = \begin{cases} 0, & \rho_1 \nsim \rho_2, \\ 1, & \rho_1 \sim \rho_2. \end{cases}$$

它叫做单純特征标的直交关系。

由这与前节定理 13 同样得到下面的系。

系 1 假定 $\rho_1, \cdots, \rho_r$ 是有限群 G 不等价的既約表現,那末单純特征标 $\chi_{\rho_1}, \cdots, \chi_{\rho_r}$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上是綫性无关。 (系 1 毕)

因为 χ_{ρ_i} 都是 $A(G)$ 中元, $A(G)$ 是 ($\boldsymbol{C}$ 上) n 維向量空間,于是更得到下面的系。

系 2 阶为 n 的有限群的不等价既約表現的个数不大于 n (参照后面的定理 21)。

象上面那样, G 的任意表現 ρ, 能够由既約表現 $\rho_1, \cdots, \rho_r$ 用直和

$$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$$

的形状表示,但是这时在 $\rho_1, \cdots, \rho_r$ 中也許有等价的,假如把等价的分别集中,命

$$\rho = m_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus m_k\rho_k \quad (m_i \text{是自然数}),$$

其中 $\rho_1, \cdots, \rho_k$ 沒有等价的，那末 m_i 叫做 ρ_i 在 ρ 的重復度，用 $(\rho:\rho_i)$ 表示。

由上式立即得到

$$\chi_\rho = m_1\chi_{\rho_1} + \cdots + m_k\chi_{\rho_k},$$

由定理 14 更得到下面的命題。

命題 10　$(\rho:\rho_i) = (\chi_\rho, \chi_{\rho_i})$.

下面的事实大都是定理 14 的系，因为是特征标的重要性质，所以特作为定理提出。

定理 15　有限群 G 的两个表現 ρ, σ 成为等价，必要且只要 $\chi_\rho = \chi_\sigma$.

証明　$\rho \sim \sigma \Rightarrow \chi_\rho = \chi_\sigma$ 已經在命題 9(i) 中示明。反之，假如 $\chi_\rho = \chi_\sigma$，由上命題 10，对于 G 的任意既約表現ρ_i，$(\rho:\rho_i) = (\sigma:\rho_i)$，所以 $\rho \sim (\rho:\rho_1)\rho_1 \oplus \cdots \oplus (\rho:\rho_k)\rho_k = (\sigma:\rho_1)\rho_1 \oplus \cdots \oplus (\sigma:\rho_k)\rho_k \sim \sigma$.

(証毕)

由定理 14 更立即得到下面的定理。

定理 16　假定 $\rho_1, \cdots, \rho_r$ 是既約表現，$\rho = m_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus m_r\rho_r$，那末 $(\chi_\rho, \chi_\rho) = m_1^2 + \cdots + m_r^2$.

系 1　ρ 是既約表現的必要充分条件是 $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.

由这最后的系，ρ 是否是既約表現可以簡单地只从特征标 χ_ρ 来判别。

系 2　在有限群 G 的两个既約表現 ρ_1, ρ_2 中，如果 ρ_2 是 1 級表現，那末張量积表現 $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ 也是既約的。

証明　$(\chi_\rho, \chi_\rho) = \dfrac{1}{n}\sum_{a\in G}\chi_\rho(a)\overline{\chi_\rho(a)}$

$$= \frac{1}{n}\sum_{a\in G}\chi_{\rho_1}(a)\chi_{\rho_2}(a)\overline{\chi_{\rho_1}(a)\chi_{\rho_2}(a)}.$$

这里因为 ρ_2 是 1 級旣約表現，所以 $\chi_{\rho_2}(a)$ 是 1 的 n 乘根。因此

$$\chi_{\rho_2}(a)\overline{\chi_{\rho_2}(a)}=1,$$

所以 $$(\chi_\rho,\ \chi_\rho)=\frac{1}{n}\sum_{a\in G}\chi_{\rho_1}(a)\overline{\chi_{\rho_1}(a)}=(\chi_{\rho_1},\ \chi_{\rho_1})=1.$$

例 5 假定 ρ 是有限群 G 的 d 級任意(不一定是旣約)表現，如果 $\chi_\rho=\chi$，那末对于 $a\in G$，

(1) $\chi(a^{-1})=\overline{\chi(a)}$,

(2) $|\chi(a)|\leqslant d$,

(3) 假如 $\chi(a)=d$，那末，对于任意 $x\in G$ 有 $\rho(x)\rho(a)=\rho(a)\rho(x)$.

［解］ 假如 $\rho\sim\rho'$ 那末 $\chi_\rho=\chi_{\rho'}$. 因为有与 ρ 等价的酉表現，所以 ρ 开始作为酉的并不失一般性。假定 $a\to P(a)=(p_{ij}(a))$ 是 ρ 由酉矩陣的表現，那末 $\chi(a)=\sum_{i=1}^{d}p_{ii}(a)$. 因为 $P(a)$ 是酉的，所以

(1) $P(a^{-1})=(P(a))^{-1}={}^t\overline{P(a)}$. 因此 $\chi(a^{-1})=\sum_{i=1}^{d}\overline{p_{ii}(a)}=\overline{\chi(a)}$.

(2) ${}^t\overline{P(a)}P(a)=E_d$. 因此 $\sum_{j=1}^{d}|p_{ij}(a)|^2=1$，$|p_{ii}(a)|\leqslant1$，于是 $|\chi(a)|\leqslant d$.

(3) $\chi(a)=d$ 只有在 $p_{ii}(a)=1$, $i=1,\cdots,d$ 即 $P(a)=E_d$ 时成立。这时，对于任意 $x\in G$，$P(x)P(a)=P(a)P(x)$. 因此 $\rho(x)\rho(a)=\rho(a)\rho(x)$.

例 6 假定在 G，$a\sim a^{-1}$ (a 与 a^{-1} 属于同一共軛类)，那末 $\chi(a)\in\boldsymbol{R}$. 对于所有 $x\in G$，如果 $x\sim x^{-1}$，那末特征标所取的値都是实数。特別 $\mathfrak{S}_n$ 的特征标都取实数値❶。

［解］ 由例 5(1) 显然。

注意 在后面将証明 (§ 41) $\mathfrak{S}_n$ 的特征标实际是有理整数。

§ 33 群代数 $A(G)$ 的构造

在上定理 14 的系 2 中已示明有限群 G 不相互等价的旣約表

---

❶ 因为 $s\sim s^{-1}$，这是由于可以假定 s 是循环置换(不然可以把 s 表为含不同文字的循环置换的乘积)，s 与 s^{-1} 具有相同的循环次数，而两置换为共軛的必要充分条件是它們有共同的循环次数，所以 $s\sim s^{-1}$. 实际上，假如 $s=(s_1s_2\cdots s_k)$，$t=(t_1t_2\cdots t_k)$，命 $p=\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & \cdots & s_k\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k\end{pmatrix}$，那末 $p_s^{-1}p=t$.——譯者注

現的个数是有限的。假定这数是 $q(G)=q$, $\rho_1, \cdots, \rho_q$ 是自各既約表現类各取一个的既約表現，即既約表現的"代表系"。这时有下面的重要定理成立。

定理 17 假定 ρ 是有限群 G 的正則表現，$\rho_1, \cdots, \rho_l$ 是 G 的既約表現的代表系，如果 ρ_ν 的級数是 d_ν，那末 $(\rho:\rho_{\nu})=d_\nu$。

証明 假定 $\rho=m_1\rho_1\oplus\cdots\oplus m_q\rho_q$ 来証明 $m_\nu=d_\nu$ 即可。由命題10，$m_\nu=(\chi_\rho, \chi_{\rho_\nu})=\dfrac{1}{n}\sum_{x\in G}\chi_\rho(x)\overline{\chi_{\rho_\nu}(x)}$ (n 是 G 的阶)。但由 §32 例1，例2，$\chi_\rho(e)=n$, $\chi_{\rho_\nu}(e)=d_\nu$，假如 $x\neq e$，那末 $\chi_\rho(x)=0$. 所以 $m_\nu=\dfrac{1}{n}\cdot n\cdot d_\nu=d_\nu$. (証毕)

下面两个系是重要的。

系 1 $n=d_1^2+\cdots+d_q^2$.

証明 由 $n=\chi_\rho(e)=d_1\chi_{\rho_1}(e)+\cdots+d_q\chi_{\rho_q}(e)$，自明。

系 2 有限群的所有既約表現是正則表現的子表現。

例 1 $G=\mathfrak{S}_3$ 的既約表現已知有恒等表現 ρ_1，交代表現 ρ_2，2 級表現 ρ_3 三个。因为 G 的阶是 6，而 $6=1^2+1^2+2^2$，所以 G 的既約表現与 ρ_1, ρ_2, ρ_3 中之一等价 (§27，例2，但那里的記法——ρ_i 的番号——与这里不同)。

假定有限群 G 的既約表現的代表系是 $\rho_1, \cdots, \rho_q$，它們的級数分别是 $d_1, \cdots, d_q$，如果 ρ_ν 的矩陣表現 $x\to P_\nu(x)=(p_{ij}^{(\nu)}(x))$，那末 $p_{ij}^{(\nu)}(x)\in A(G)$. 因为 i, j 是自 1 到 d_ν 变动，所以全部能够得到 $\sum_{\nu=1}^{q}d_\nu^2$ 个 $A(G)$ 中元。它們叫做由既約矩陣表現的代表系 $P_1, \cdots, P_q$ 所确定的**基本函数系**。

定理 18 基本函数系形成 $A(G)$ 的基底。

証明 由 Burnside 定理，基本函数系在 C 上是綫性无关。并且它的个数 $\sum_{\nu=1}^{q}d_\nu^2$ 由前面定理系 1 等于 $A(G)$ 的維数 n. 所以由 §5 即得本定理。

定理 19 假定有限群 G 的既約表現的代表系 $\rho_1, \cdots, \rho_q$ 的級

数分别是 $d_1, \cdots, d_q$，那末 G 的群代数 $A(G)$ 与 q 个矩阵环的直和 $\mathfrak{M}(d_1, \boldsymbol{C})\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}(d_q, \boldsymbol{C})$ 作为代数是同构。

証明 假定 ρ_ν 的矩陣表现是 $P_\nu=(p_{ij}^{(\nu)})$，前定理已示明 $p_{ij}^{(\nu)}$，$i, j=1, \cdots, d_\nu$；$\nu=1, \cdots, q$ 构成 $A(G)$ 的基底。但由定理 12 的系 1 中直交关系式，命 $\frac{d_\nu}{n}p_{ij}^{(\nu)}=e_{ij}^{(\nu)}$，得

$$\begin{cases} e_{ij}^{(\nu)}\cdot e_{kl}^{(\mu)}=0, & \nu\neq\mu, \\ e_{ij}^{(\nu)}\cdot e_{kl}^{(\nu)}=\delta_{jk}e_{il}^{(\nu)}. \end{cases} \tag{33.1}$$

这等 $e_{ij}^{(\nu)}$，$i, j=1, \cdots, d_\nu$；$\nu=1, \cdots, q$ 显然也构成 $A(G)$ 的基底，如果对于 $x=\sum_{i,j,\nu}\alpha_{ij}^{(\nu)}e_{ij}^{(\nu)}\in A(G)$，命

$$Q^{(\nu)}(x)=\begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(\nu)} & \cdots & \alpha_{1d_\nu}^{(\nu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{d_\nu 1}^{(\nu)} & \cdots & \alpha_{d_\nu d_\nu}^{(\nu)} \end{pmatrix},$$

$$Q(x)=Q^{(1)}(x)\oplus\cdots\oplus Q^{(q)}(x),$$

那末 $x\to Q(x)$ 显然給出自 $A(G)$ 到 $\mathfrak{M}(d_1, \boldsymbol{C})\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}(d_\nu, \boldsymbol{C})$ 上的同构表現。 (証毕)

在前面定义了群的中心(§30)，对于代数 A 也能够象下面那样来定义它的中心。容易驗証

$$C(A)=\{x;\ ax=xa,\ \forall a\in A\}$$

(与 A 中所有元可换的 A 中元的集合)成为 A 的子代数，$C(A)$ 叫做代数 A 的**中心**。

例 2 $C(A_1\oplus\cdots\oplus A_k)=C(A_1)\oplus\cdots\oplus C(A_k)$.

定理 20 有限群 G 的单純特征标的全体形成代数 $A(G)$ 的中心 $C(A(G))$ 的基底。

証明 假定 G 的既約表現的代表系是 $\rho_1, \cdots, \rho_q$，茲示明特征标 $\chi_{\rho_1}, \cdots, \chi_{\rho_q}$ 成为 $C(A(G))$ 的基底即可。

由前定理，$A(G)\cong\mathfrak{M}(d_1, \boldsymbol{C})\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}(d_q, \boldsymbol{C})$. $x\in A(G)$ 到右边 $\mathfrak{M}(d_1, \boldsymbol{C})\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}(d_q, \boldsymbol{C})$ 的同构映射，象前定理的証明中

那样，用 Q 表示。由 §26 定理 3 的系 1，$\mathfrak{M}(d_\nu, C)$ 的中心是 αE_{d_ν}，$\alpha\in \boldsymbol{C}$ 形状的矩陣。再由前定理的証明得知 $Q^{-1}(E_{d_\nu})$ 为

$$\sum_{i=1}^{d_\nu} e_{ii}^{(\nu)}=\frac{d_\nu}{n}\chi_{\rho_\nu}.$$

因此 $Q^{-1}(\mathfrak{M}(d_\nu, \boldsymbol{C}))$ 的中心能够用 χ_{ρ_ν} 生成。于是成为它們的直和的 $C(A(G))$ 能够用 $\chi_{\rho_1}, \cdots, \chi_{\rho_q}$ 生成。因为 $\chi_{\rho_1}, \cdots, \chi_{\rho_q}$ 显然是无关，所以它們构成 $C(A(G))$ 的基底。

例 3 假定 f 是 $C(A(G))$ 中任意元，那末

$$f=\sum_{\nu=1}^{q}(f, \chi_{\rho_\nu})\chi_{\rho_\nu}.$$

［解］ 由 $(\chi_{\rho_\nu}, \chi_{\rho_\mu})=\delta_{\nu\mu}$ 显然❶。

$A(G)$ 中元 f 在 G 的共軛类上取一定值的，即对于任意 $x, y\in G$ 满足 $f(x)=f(yxy^{-1})$ 或 $f(yx)=f(xy)$ 的函数，叫做 G 的**类函数**。例如特征标是类函数。假定把 G 类分为共軛类 $C_1, \cdots, C_r$，含于 $C_\lambda(\lambda=1, \cdots, r)$ 中元的个数是 n_λ（于是 $\sum_{\lambda=1}^{r} n_\lambda=n$（$G$ 的阶））。如果把 $f\in A(G)$ 象 §29 命題 5 后面那样写成 $f=\sum_{x\in G} f(x)x$，那末对于类函数 f 自各类 C_λ 选代表元 x_λ，又命 $\sum_{x\in C_\lambda} x=X_\lambda$ 就有 $f=\sum_{\lambda=1}^{r} f(x_\lambda)X_\lambda$。类函数的全部集合显然成为 C 上向量空間 $A(G)$ 的子空間 $C'(A(G))$，因为 X_λ 是它的基底，所以它的維数等于 r。

因为 $A(G)$ 的中心 $C(A(G))$ 中元显然是类函数，所以 $C(A(G))\subset C'(A(G))$。另一方面，对于任意 X_λ 与任意 $a\in G$，$aX_\lambda=\sum_{x\in C_\lambda} ax=\sum_{x\in C_\lambda} xa=X_\lambda a$。因为 G 中元看成为 $A(G)$ 中元时是 $A(G)$ 的基底，所以 $X_\lambda\in C(A(G))$。因此 $C'(A(G))\subset C(A(G))$。于是 $C(A(G))=C'(A(G))$。但 $\dim C(A(G))$ 由前定理等于 q，

❶ 因为 $\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}, \cdots, \chi_{\rho_q}$ 是 $C(A(G))$ 的一个基底，而 $f\in C(A(G))$，所以 $f=\sum_{\nu=1}^{q} a_\nu \chi_{\rho_\nu}$。两边对 χ_{ρ_μ} 求内积，因为 $(\chi_{\rho_\nu}, \chi_{\rho_\mu})=\delta_{\nu\mu}$，所以 $(f, \chi_{\rho_\mu})=a_\mu$，因此 $f=\sum_{\nu=1}^{q}(f, \chi_{\rho_\nu})\chi_{\rho_\nu}$。——譯者注

所以 $q=r$. 于是就証明了下面的定理。

定理 21 有限群 G 的不等价旣約表現的个数，等于 G 的共軛类的个数。

例 4 $\mathfrak{S}_3$ 的不等价旣約表現的个数是 3 (例 1)，它等于 $\mathfrak{S}_3$ 的共軛类的个数(187 頁例 2)。

由本节定理 19, 20，則 $A(G)$, $C(A(G))$ 的构造是明显的。又由前节及本节有限群的表現能够用特征标較好的来規定。特别由最后的定理 21，假如 G 有 q 个类 $C_1, \cdots, C_q$，及 q 个单純特征标 $\chi_{\rho_1}, \cdots, \chi_{\rho_q}$，如果 χ_{ρ_ν} 在 C_λ 上所取的值是 $\alpha_{\nu\lambda}$，那就得到 (q, q) 型正方矩陣。但因为

类 / 指标	C_1	$\cdots$	C_λ	$\cdots$	C_q
χ_{ρ_1}	α_{11}	$\cdots$	$\alpha_{1\lambda}$	$\cdots$	α_{1q}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
χ_{ρ_ν}	$\alpha_{\nu1}$	$\cdots$	$\alpha_{\nu\lambda}$	$\cdots$	$\alpha_{\nu q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
χ_{ρ_q}	α_{q1}	$\cdots$	$\alpha_{q\lambda}$	$\cdots$	α_{qq}

$$\sum_{\lambda=1}^{q} n_\lambda \alpha_{\nu\lambda} \overline{\alpha_{\mu\lambda}} = n\delta_{\nu\mu} \text{❶}, \tag{33.2}$$

❶ 假設 ρ_ν, ρ_μ 是不等价的两个旣約表現，其表現矩陣分别为 $(a^\nu_{ij}(x))$, $(a^\mu_{kl}(x))$，因为 $a^\mu_{kl}(x^{-1})=\overline{a^\mu_{lk}(x)}$，所以由 (31.2), (31.3) 卽得

$$\sum_{x\in G} a^\nu_{ij}(x)\cdot\overline{a^\mu_{lk}(x)}=0, \quad 当\ \nu\neq\mu, \tag{1}$$

$$\sum_{x\in G} a^\nu_{ij}(x)\cdot\overline{a^\mu_{lk}(x)}=\frac{n}{m}\delta_{jk}\delta_{il}, \quad 当\ \nu=\mu. \tag{2}$$

合并上两式卽得等式 $\displaystyle\sum_{x\in G} a^\nu_{ij}(x)\cdot\overline{a^\mu_{lk}(x)}=\frac{n}{m}\delta_{jk}\delta_{il}\delta_{\nu\mu}$.

假定 $\nu=\mu$，由 (2)，命 $j=i$ 并对 i 求和得

$$\sum_{x\in G}\left(\sum_{i=1}^{m} a^\nu_{ii}(x)\cdot\overline{a^\mu_{lk}(x)}\right)=\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m}\delta_{ik}\delta_{il}=\frac{n}{m}\delta_{kk}\delta_{ll}.$$

再命 $k=l$，并对 k 求和卽得

$$\sum_{x\in G}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a^\nu_{ii}(x)\overline{a^\mu_{kk}(x)}\right)=\frac{n}{m}\cdot m=n.$$

卽

$$\sum_{x\in G}\chi_{\rho_\nu}(x)\cdot\overline{\chi_{\rho_\mu}(x)}=n.$$

因为 χ_{ρ_ν} 是类函数，所以 $\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{q} n_\lambda\alpha_{\nu\lambda}\overline{\alpha_{\mu\lambda}}=n$.

当 $\nu\neq\mu$ 时，由 (1) 式出发用同样方法卽可推出

$$\sum_{\lambda=1}^{q} n_\lambda\alpha_{\nu\lambda}\cdot\overline{\alpha_{\mu\lambda}}=0.$$

所以 (33.2) 式成立。—— 譯者注

命 $\sqrt{\frac{n_\lambda}{n}}\alpha_{\nu\lambda}=\beta_{\nu\lambda}$，那末 $(\beta_{\nu\lambda})$ 成为酉矩陣。于是

$$\sum_{\nu=1}^{q}\beta_{\nu\lambda}\bar{\beta}_{\nu\varkappa}=\delta_{\lambda\varkappa},$$

所以
$$\sum_{\nu=1}^{q}\alpha_{\nu\lambda}\bar{\alpha}_{\nu\varkappa}=\frac{n}{n_\lambda}\delta_{\lambda\varkappa}.$$

对于 $x, y\in G$，$n_x=$(x 所屬的共軛类中元的个数)，假如当 $x\sim y$ 时，命 $\delta_{xy}=1$，当 $x\not\sim y$，命 $\delta_{xy}=0$，那末

$$\sum_{\nu=1}^{q}\chi_{\rho_\nu}(x)\chi_{\rho_\nu}(y^{-1})=\sum_{\nu=1}^{q}\chi_{\rho_\nu}(x^{-1})\chi_{\rho_\nu}(y)=\frac{n}{n_x}\delta_{xy}. \quad (33.3)$$

在第二式特别命 $x=e$ 得

$$\sum_{\nu=1}^{q}d_\nu\chi_{\rho_\nu}(y)=\begin{cases}n, & y=e,\\ 0, & y\neq e.\end{cases}$$

(33.3) 叫做特征标的**第二直交关系**，与它相对，也有把 § 32 定理 14 叫做**第一直交关系**的。在有限群的单純特征标之間有如此的关系成立。

例 5　关于 $\mathfrak{S}_3$ 的 $\alpha_{\nu\lambda}$ 的表如下。特征标的第二直交关系由它容易推得。

			C_1	C_2	C_3
			(1)	(1 2), (1 3), (2 3)	(1 2 3), (1 3 2)
			$n_1=1$	$n_2=3$	$n_3=2$
恒等表現 ρ_1	$d_1=1$	χ_{ρ_1}	1	1	1
交代表現 ρ_2	$d_2=1$	χ_{ρ_2}	1	-1	1
2 級既約表現 ρ_3	$d_3=2$	χ_{ρ_3}	2	0	-1

例 6　求 $\mathfrak{S}_4$ 的所有单純特征标。

［解］　象在 § 30 例 3 的表中所示，因为 $\mathfrak{S}_4$ 能够分为五个共軛类，所以有五个既約表現，首先容易求得恒等表現 ρ_1 及交代表現 ρ_2 的特征标。一般，某表現 σ 的特征标 χ_σ 用 188 頁例 3 表中的記号，在类 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 中所取的值分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 时，假如写成 $\chi_\sigma=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$，显然

$$\chi_{\rho_1}=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1),\ \chi_{\rho_2}=(1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1).$$

其次，假如把§27例2中开始所述的表現 ρ（即对于 $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}\in G$ 使矩陣 $\pi(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_n)$ 对应的 n 級忠实表現）取为 $n=4$，那末❶

$$\chi_\rho=(4,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0).$$

与§27例2同样考察能够分解 $\rho=\rho_1\oplus\rho_3$，因为 $\chi_\rho=\chi_{\rho_1}+\chi_{\rho_3}$，所以

$$\chi_{\rho_3}=(3,\ 1,\ -1,\ 0,\ -1).$$

但因 $(\chi_{\rho_3},\ \chi_{\rho_3})=\dfrac{1}{4!}(1\times3^2+6\times1^2+3(-1)^2+8\times0^2+6(-1)^2)=1$，所以 ρ_3 是既約。因为 ρ_2 是1級表現，所以由§32定理16系2，$\rho_4=\rho_3\otimes\rho_2$ 又成为既約，

$$\chi_{\rho_4}=\chi_{\rho_3}\chi_{\rho_2}=(3,\ -1,\ -1,\ 0,\ 1).$$

于是 ρ_4 与 ρ_1，ρ_2，ρ_3 中任一都不等价。因为五个单純特征标中四个已求出，最后一个能够由第二直交关系求出。

表現	級数 d_ρ	特征标 \ 类	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
		代表元	(1)	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
		元的个数 n_λ	1	6	3	8	6
ρ_1	1	χ_{ρ_1}	1	1	1	1	1
ρ_2	1	χ_{ρ_2}	1	−1	1	1	−1
ρ_3	3	χ_{ρ_3}	3	1	−1	0	−1
ρ_4	3	χ_{ρ_4}	3	−1	−1	0	1
ρ_5	2	χ_{ρ_5}	2	0	2	−1	0

❶ 因为 $\mathfrak{S}_4$ 的五个代表类为 $(1)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$，$(1\,2)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$，$(1\,2)(3\,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$，$(1\,2\,3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$，$(1\,2\,3\,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$. 所以 $(1)\to\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$，$(1\,2)\to\begin{pmatrix}0&1&&\\1&0&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$，$(1\,2)(3\,4)\to\begin{pmatrix}0&1&&\\1&0&&\\&&0&1\\&&1&0\end{pmatrix}$，$(1\,2\,3\,4)\to\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$. 因此 $\chi_\rho=(4,2,0,1,0)$.——譯者注

§34 群的直积的表現

有限群 G 能够表为 $G_1, \cdots, G_r$ 的直积 $G_1\otimes\cdots\otimes G_r$ 的形状时，G_i 叫做 G 的**直积因子**。这时求 G 的表現的問題，由下面定理22归結于关于各个直积因子 G_i 的問題。为了在定理証明的过程中不致中断，首先把下面的命題11作为准备。

命題 11　假定 G 是有限群 G_1, G_2 的直积，G, G_i 的共軛类的个数分别是 $q, q_i (i=1, 2)$，那末 $q=q_1q_2$.

証明　G 中元 x 能够写成 $(x_1, x_2)(x_i\in G_i)$ 的形状。假如 $y=(y_1, y_2)$，因为 $yxy^{-1}=(y_1x_1y_1^{-1}, y_2x_2y_2^{-1})$，所以，如果～意味着属于同一共軛类，那末 $(x_1, x_2)\sim(x_1', x_2')\Leftrightarrow x_1\sim x_1', x_2\sim x_2'$. 由这立即得到 $q=q_1q_2$.

定理 22　假定 G_1, G_2 是有限群，G 是它們的直积 $G_1\otimes G_2$, ρ_i 是 G_i 的表現，V_i 是 ρ_i 的表現空間 $(i=1, 2)$. 这时 G 中元能够写成 $(x_1, x_2)(x_i\in G_i)$ 形状，如果 $V=V_1\otimes V_2$, $\rho(x)=\rho_1(x_1)\otimes\rho_2(x_2)\in GL(V)$，那末 $x\to\rho(x)$ 是 G 在 V 的表現。这时成立

(1)　$\chi_\rho(x)=\chi_{\rho_1}(x_1)\cdot\chi_{\rho_2}(x_2)$.

(2)　ρ 是既約的必要充分条件是 ρ_1, ρ_2 都是既約。

假如 G_i 的既約表現的代表系是 $\rho_i^{(1)}, \cdots, \rho_i^{(q_i)}$，那末 q_1q_2 个 G 的表現 $\rho_1^{(j_1)}\otimes\rho_2^{(j_2)}$ $(j_i=1, \cdots, q_i)$ 是 G 的既約表現的代表系。

証明　$x\to\rho(x)$ 是 G 的表現及(1)，由張量积的性质（129頁例8及195頁）是显明的。

为了証明(2)，首先証明下面的事实。假定 ρ_i' 是 G_i 的另一表現，$\rho_1'\otimes\rho_2'=\rho'$. 为了簡单，命 $\chi_\rho=\chi$, $\chi_{\rho_i}=\chi_i$, $\chi_{\rho'}=\chi'$, $\chi_{\rho_i'}=\chi_i'$，那末 χ, χ' 在 $A(G)$ 的內积 (χ, χ') 成为 χ_i, χ_i' 在 $A(G_i)$ 的內积 (χ_i, χ_i') 的积，即

$$(\chi, \chi')=(\chi_1, \chi_1')(\chi_2, \chi_2') \tag{34.1}$$

成立。实际上,假如 G_i 的阶是 n_i, 因为 G 的阶是 $n=n_1n_2$, 所以

$$
\begin{aligned}
(\chi, \chi') &= \frac{1}{n} \sum_{x\in G} \chi(x)\overline{\chi'(x)} \\
&= \frac{1}{n_1n_2} \sum_{\substack{x_1\in G_1\\ x_2\in G_2}} \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)\overline{\chi_1'(x_1)\chi_2'(x_2)} \\
&= \Big(\frac{1}{n_1} \sum_{x_1\in G_1} \chi_1(x_1)\overline{\chi_1'(x_1)}\Big)\Big(\frac{1}{n_2} \sum_{x_2\in G_2} \chi_2(x_2)\overline{\chi_2'(x_2)}\Big) \\
&= (\chi_1, \chi_1')(\chi_2, \chi_2').
\end{aligned}
$$

用它能够立即証明 (2)。由定理 16 系,“ρ 既約$\Leftrightarrow(\chi, \chi)=1$”,“$\rho_i$ 既約$\Leftrightarrow(\chi_i, \chi_i)=1$”. 因此,如果于(34.1)命 $\chi=\chi'$, $\chi_i=\chi_i'$ 就得到“ρ_1, ρ_2 既約$\Rightarrow\rho$ 既約”。又假如 ρ_1 或 ρ_2 是可約,因为 (χ_1, χ_1) 或 $(\chi_2, \chi_2)>1$, 那末 ρ 也是可約。所以(2)成立。

于是 $\rho_1^{(j_1)}\otimes\rho_2^{(j_2)}$ 都是既約的,为了証明它們能够旁尽 G 的既約表現的代表类,注意下面事实。假定 ρ_i', ρ' 是与上同样意义,当 ρ_i, ρ_i' 是既約时,

$$\rho\sim\rho' \Leftrightarrow \rho_1\sim\rho_1', \ \rho_2\sim\rho_2'$$

成立。这由 (34.1) 与特征标的直交性 (定理 14) 是显明的。所以 q_1q_2 个 G 的既約表現 $\rho_1^{(j_1)}\otimes\rho_2^{(j_2)}$ 属于相异的表現类。但是由命題 11 及定理 21, 因为 G 的相异的既約表現类的个数正好是 q_1q_2, 所以它們能够旁尽它的全部。

系 有限群 G 能够直积分解为 $G_1\otimes\cdots\otimes G_r$ 形状时, G 的既約表現的代表系能够由各因子 G_i 的既約表現代表系所作的張量积表出。 (系毕)

例如引用 § 22 例 10 中所述的“可换群的基本定理”,那末全部求有限可换群表現的問題由上定理立即得到解决。但这基本定理的証明沒有叙述,因此在这里对于有限群来补証。首先自下面的命題开始。

命题 12 假定 G 是阶为 n 的有限可换群。 $n=n_1n_2$, (n_1, n_2)

$=1$，那末 G 中阶是 n_i 的約数的元全体的集合 H_i 成为 G 的子群，并且 $G=H_1\otimes H_2$.

証明　先示 H_i 成为 G 的子群。假定 $x_1, y_1\in H_1$ 即 x_1, y_1 的阶都是 n_1 的約数，因为 $(x_1y_1^{-1})^{n_1}=x_1^{n_1}(y_1^{n_1})^{-1}=e$，所以 $x_1y_1^{-1}$ 的阶也是 n_1 的約数。于是 $x_1y_1^{-1}\in H_1$. 因为对于 H_2 也是一样，所以 H_i $(i=1, 2)$ 成为 G 的子群。因为 G 是可换群，所以 H_i 是 G 的正規子群。这时当然 H_1 中元与 H_2 中元是可換。因此只要証明 G 中任意元 x 能够唯一地写成 $x=x_1x_2$, $x_i\in H$ 的形狀即可。因为 $(n_1, n_2)=1$，所以有满足 $n_1h_1+n_2h_2=1$ 这样的 $h_1, h_2\in \boldsymbol{Z}$ (157頁，(ii))。于是 $x=x^{n_2h_2}x^{n_1h_1}$，但 $(x^{n_2h_2})^{n_1}=x^{n_1n_2h_2}=x^{nh_2}=e$，如果命 $x^{n_2h_2}=x_1$，那末 $x_1\in H_1$. 同样 $x^{n_1h_1}=x_2\in H_2$，即任意 $x\in G$ 能够表为 x_1x_2, $x_i\in H_i$ 的形狀。再假如 $x_1x_2=y_1y_2$, $x_i, y_i\in H_i$，如果命 $x_iy_i^{-1}=z_i$，那末 $z_i\in H_i$, $z_1z_2=e$. 命 z_1, z_2 的阶分别是 m_1, m_2，那末 $m_i|n_i$，因而 $(m_1, m_2)=1$. 所以 z_1z_2 的阶是 m_1m_2(158頁引理1)。今 $m_1m_2=1$，所以 $m_1=m_2=1$. 即 $z_1=z_2=e$，这就証明了 $x=x_1x_2$ 表示方法的唯一性，所以 $G=H_1\otimes H_2$.

系　假如有限可換群 G 的阶 n 质因数分解成为 $n=p_1^{\nu_1}\cdots p_r^{\nu_r}$，那末 G 能够直积分解为 $H_1\otimes\cdots\otimes H_r$ 形狀。但 H_i 是由 G 中阶为 $p_i^{\nu_i}$ 的約数的元全体构成的 G 的子群。

命題 13　假定 G 是有限可換群，如果 G 中异于 e 的任意元的阶都是质数 p，那末 G 是阶数 p 的循环群的直积，G 的阶是 p^r 形狀。

証明　在这命題的証明中，开始把 G 的基本算法用加減法的形狀写出。对于 $x\in G$，如果写 $x+x=2x$, $2x+x=3x$, $\cdots$，那末 $px=0$(G 的单位元)。于是对于 $\lambda\in \boldsymbol{Z}_p$, $x\in G$，則 $\lambda x\in G$ 唯一的定义，并且显然满足 9 頁 B1～5。因为 $\boldsymbol{Z}_p$ 是体(§ 24 160 頁)，所以 G 是 $\boldsymbol{Z}_p$ 上向量空間。但 G 是有限，所以这向量空間的維数也有限，

如果它是 r，就具有 r 个基底 $a_1,\cdots,a_r$(22 頁，定理 5)。即 G 中任意元 x 能够唯一地写成 $\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_r a_r$, $\lambda_i\in \boldsymbol{Z}_p$ 的形状。因此，如果变为普通乘法的記法，那末 x 就能够唯一地表为 $a_1^{\lambda_1}\cdots a_r^{\lambda_r}$ 形状。$H_i=\{e, a_i, a_i^2, \cdots, a_i^{p-1}\}$ 显然成为 G 的 p 阶循环子群，而 $G=H_1\otimes\cdots\otimes H_r$. 因为 H_i 的阶是 p，所以 G 的阶是 p^r.

命題 14 假如有限可换群 G 中所有元的阶是质数冪 p^ν 的約数，那末 G 是把 p 的連乘作为阶数的循环群的直积 (因此 G 的阶也是 p 的連乘)。

証明 假定 $\nu=1$，那末这命題就是前命題，因此用关于 ν 的归納法，对于 $\nu-1$ 假定命題已証明，来証明 $\nu(\geqslant 2)$ 的情况。

假定把 G 中各元 p 乘的集合 $\{x^p; x\in G\}$ 用 G^p 表示，那末 G^p 成为 G 的子群。实际上，x, $y\in G$ 时，$x^p(y^p)^{-1}=(xy^{-1})^p\in G^p$. 并且 G^p 中各元的阶显然是 $p^{\nu-1}$ 的約数。所以由归納法的假定，G^p 是把 p 的連乘作为阶的循环群的直积。今假定 $G^p=H_1\otimes\cdots\otimes H_k$, $H_i=\{e, a_i^p, a_i^{2p}, \cdots, a_i^{p(p^{r_i}-1)}\}$ $(r_i\geqslant 1)$. 于是 p^{r_i} 是 a_i^p 的阶。因而 a_i 的阶是 p^{r_i+1}. 命 $A_i=\{e, a_i, a_i^2, \cdots, a_i^{p^{r_i+1}-1}\}$, $A=A_1\cdots A_k$, 显然 $A_i^p=H_i$, $A^p=G^p$, A 是用 $a_1, \cdots, a_k$ 生成的 G 的子群。要証明 $A=A_1\otimes\cdots\otimes A_k$, 在这里只要証明

$$a_1^{\nu_1}\cdots a_k^{\nu_k}=a_1^{\nu_1'}\cdots a_k^{\nu_k'}\Rightarrow \nu_i\equiv\nu_i' \pmod{p^{r_i+1}}$$

即可。由假定 $a_1^{p\nu_1}\cdots a_k^{p\nu_k}=a_1^{p\nu_1'}\cdots a_k^{p\nu_k'}\in H_1\otimes\cdots\otimes H_k$. 所以 $\nu_i\equiv\nu_i' \pmod{p^{r_i}}$. 今 $r_i\geqslant 1$, 所以有满足 $\nu_i-\nu_i'=p\rho_i$ 的 $\rho_i\in \boldsymbol{Z}$. 因此由上式就得到 $a_1^{p\rho_1}\cdots a_k^{p\rho_k}=e$, 但 $a_i^p\in H_i$, $H_1\otimes\cdots\otimes H_k$ 是直积，因此 $\rho_i\equiv 0 \pmod{p^{r_i}}$. 所以 $\nu_i-\nu_i'=p\rho_i\equiv 0 \pmod{p^{r_i+1}}$.

于是命 $G/A=H$，因为 $G\supset A\supset A^p=G^p$，所以 G 中任意元如果 p 乘就在 A 中，因此，H 中任意元如果 p 乘即成为 H 的单位元 $E=A$. 所以 $H=E$ 或 H 成为满足命題 13 中假設的 (不是单位群) 群。当 $H=E$ 时，因为 $G=A=A_1\otimes\cdots\otimes A_k$, 这样就达到了目

的。在后面情况，假定 $H=K_1\otimes\cdots\otimes K_l$, $K_j=\{E, B_j, B_j^2, \cdots, B_j^{p-1}\}$ $(j=1, \cdots, l)$，如果 $b_j\in B_j$. 因为 $b_j^p\in G^p=A^p$，取适当的 $c_j\in A$，那末 $b_j^p=c_j^p$. 因此命 $d_j=b_jc_j^{-1}$，就得到 $d_j\in B_j$, $d_j^p=e$. G 中任意元 x 显然能够写成

$$x=a_1^{\lambda_1}\cdots a_k^{\lambda_k}d_1^{\mu_1}\cdots d_l^{\mu_l}$$

$$(\lambda_i=0, 1, \cdots, p^{r_i+1}-1;\ \mu_j=0, 1, \cdots, p-1), \qquad (34.2)$$

又因为 λ_i, μ_j 在上面范圍內变动正好是 p 的 $\left(\sum_{i=1}^{k}(r_i+1)+l\right)$ 乘，卽正好能够得到 $(A:1)\cdot(H:1)=(G:1)$ 个元，所以 G 中元象 (34.2) 那样的表示方法是唯一的。于是命 $D_j=\{e, d_j, \cdots, d_j^{p-1}\}$ 就得到 $G=A_1\otimes\cdots\otimes A_k\otimes D_1\otimes\cdots\otimes D_l$.　　(証毕)

由命题 12 的系及上面的命题 14 得出下面"关于有限可换群的基本定理"。

定理 23　有限可换群能够表为循环群的直积。

例 1　(1) 命题 12 中 H_i 的阶是 n_i.

(2) 命题 12 系中 H_i 的阶是 $p_i^{\nu_i}$.

［解］　証明(2)这方卽可。由命题 14，H_i 的阶是 p_i 的連乘 $p_i^{\nu_i'}$. 因为 $G=H_1\otimes\cdots\otimes H_k$，所以 G 的阶 $n=p_1^{\nu_1'}\cdots p_k^{\nu_k'}=p_1^{\nu_1}\cdots p_k^{\nu_k}$. 由质因数分解的唯一性，$\nu_i'=\nu_i(i=1, \cdots, k)$.

由定理 23，任意有限可换群 G 能够用循环群 $G_1, \cdots, G_r$ 的直积 $G_1\otimes\cdots\otimes G_r$ 的形状写出。因此，假如 G_i 的生成元是 a_i，它的阶是 n_i，那末 G 中任意元 x 能够唯一地表为

$$x=a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2}\cdots a_r^{\nu_r}.$$

$\{a_1, \cdots, a_r\}$ 叫做 G 的**基底**。上面定理叫做可换群的**基底定理**。

例 2　四元群(Klain 的四元群 Vierergruppe)。由 1, $a=(1\,2)(3\,4)$, $b=(1\,3)(2\,4)$, $c=(1\,4)\cdot(2\,3)$ 四个元构成的 $\mathfrak{S}_4$ 的子群 G，叫做**四元群**。这群 G 的群表如左。它显然是可换群。假定 $G_1=\{1,$

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

$a\}$, $G_2=\{1, b\}$, $G_3=\{1, c\}$，那末它們都是 G 的阶 2 的循环子群，而 $G=G_1\otimes G_2=G_2\otimes G_3=G_3\otimes G_1$。$G$ 的基底能够取 $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ 中任一个。(象这样，基底的取法一般不是唯一的。)

由 170 頁的例与上定理 22 的系，及定理 23 立卽得到下面关于有限可換群的旣約表現的結論。

定理 24 假定 G 是有限可換群，$G=G_1\otimes\cdots\otimes G_r$ 是 G 的循环群 $G_i(i=1, \cdots, r)$ 的直积分解。如果 G_i 的阶是 n_i，它的生成元是 a_i，命 $\zeta_i=\exp(2\pi\sqrt{-1}/n_i)$，那末 G 的旣約表現都是 1 級，由

$$G\ni x=a_1^{m_1}\cdots a_r^{m_r}\to\chi_{m_1,\cdots,m_r}(x)=\zeta_1^{m_1}\cdots\zeta_r^{m_r}$$

給出。这里 m_i 在 $\bmod n_i$ 的剩余类上变动 $(i=1, \cdots, r)$。

注意 假如 m_i 分别取 $0, 1, \cdots, n_i-1$ 的值，就得到 G 所有的旣約表現。因此 G 的旣約表現的个数是 $n_1n_2\cdots n_r=n$ (G 的阶) (这由 §30 例 1 及 §33 定理 21 自明)。象 §32 中注意那样，这时 G 的旣約表現与 G 的特征标一致。把 G 的特征标的集合用 G^* 表示，如果 $\chi_{m_1,\cdots,m_r}, \chi_{m_1',\cdots,m_r'}\in G^*$ 的积用 $\chi_{m_1+m_1',\cdots,m_r+m_r'}$ 定义，那末 G^* 也成为可換群。G^* 显然与 G 同构。G^* 叫做 G 的**特征标群**，$G\cong G^*$ 这事实，叫做关于可換群的特征标群的**对偶定理**。

§35 誘导表現

假定 G 是任意群，H 是它的子群，給出 H 的一个表現 σ，这时能够象下面那样作出 G 的表現 ρ。

假定 U 是 σ 的表現空間，在把 G 作为定义域，取 U 中值的函数 $f, g, \cdots$ 的集合 W 中，如果由

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a)\quad (a\in G),$$
$$(\lambda f)(a)=\lambda f(a)\quad (a\in G,\ \lambda\in \boldsymbol{C})$$

引入綫性算法，那末 W 成为 ($\boldsymbol{C}$ 上) 向量空間。假如对于任意 $a\in G$, $b\in H$，滿足

$$f(ba)=\sigma(b)f(a)\qquad(35.1)$$

的 W 中元 f 的集合是 V，那末 V 显然成为 W 的子空間。今对

$x\in G$，写成 $f(ax)=f_x(a)$，显然 $f_x\in W$，假如 $f\in V$，因为 $f_x(ba)=f(bax)=\sigma(b)f(ax)=\sigma(b)f_x(a)$，所以 $f_x\in V$。假如由 $\rho(x)f=f_x$ 来定义 $\rho(x)$，那就立刻得知 $\rho(x):V\to V$，$\rho(x)\in GL(V)$，并且

$$\rho(xy^{-1})=\rho(x)\rho(y)^{-1}.$$

因此 ρ 成为 G 把 V 作为表現空間的表現。这 ρ 叫做由 H 的表現 σ 誘导的 G 的**誘导表現**。

今假定 G 是 n 阶有限群，H 是它的 h 阶子群，$n=hk$，于是 $(G:H)=k$。把 G 类分为关于 $\bmod H$ 的右剩余类，假定

$$G=Ha_1+\cdots+Ha_k,$$

又假定 $\dim U$（$=\sigma$ 的級数）$=m$，$u_1,\cdots,u_m$ 是 U 的一个基底，这时命

$$\begin{cases}f_{ij}(a_l)=\delta_{il}u_j,\\ f_{ij}(ba_l)=\sigma(b)f_{ij}(a_l),\ \text{对于}\ b\in H,\end{cases}$$

那末 $f_{ij}(x)$，$x\in G$，已定义，容易得知 $f_{ij}\in V$。并且这等 f_{ij}，$i=1,\cdots,k$，$j=1,\cdots,m$ 成为 V 的基底。实际上，假如 f 是 V 中任意元，如果

$$f(a_l)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{lj}u_j,$$

显然因为 $f=\sum_{i,j}\lambda_{ij}f_{ij}$[1]，所以 V 能够用 f_{ij} 生成，又因为 $\sum\lambda_{ij}f_{ij}=0\Rightarrow\lambda_{ij}=0$，所以 f_{ij} 是无关。于是 ρ 的級数 $=\dim V=mk$。

再假定 $\{u_1,\cdots,u_m\}$ 是 U 的基底时，表示 $\sigma(b)$ 的矩陣是 $\Sigma(b)=(s_{\mu\nu}(b))$，取上面 V 的基底 $f_{11},\cdots,f_{km}$ 来考虑表示 $\rho(x)$ 的矩陣 $P(x)$ 应該成为如何形状？

对于 $x\in G$，因为 a_lx 在关于 $\bmod H$ 的某右剩余系中，假定它是 $Ha_{l'}$。$l'=l'(x,l)$ 是 x 与 l 的函数，$l'(x,1),\cdots,l'(x,k)$ 是

[1] 因为 f、$\sum_{ij}\lambda_{ij}f_{ij}$ 是 G 对于 H 的分类的类函数，所以比較它們在 $a_l(l=1,2,\cdots,k)$ 的值即知它們相等。——譯者注

$1, 2, \cdots, k$ 的一个排列。現在命 $a_l x = b_l a_{l'}$ $(b_l \in H)$，由 $\rho(x)$，f_{ij} 的定义得

$$\rho(x)f_{ij}(a_l) = f_{ij}(a_l x) = f_{ij}(b_l a_{l'}) = \sigma(b_l)f_{ij}(a_{l'})$$
$$= \delta_{il'}\sigma(b_l)u_j = \delta_{il'}\sum_{\mu=1}^{m} s_{\mu j}(b_l)u_\mu,$$

因而

$$\rho(x)f_{ij} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_{il'}s_{\mu j}(b_l)f_{l\mu}, \quad \begin{array}{l} i=1, \cdots, k, \\ j=1, \cdots, m. \end{array}$$

于是 $(\delta_{il'})$ 这样的 (k, k) 型矩陣是表示置換 $(1, 2, \cdots, k) \to (l'(x, 1), \cdots, l'(x, k))$ 的矩陣，$(s_{\mu j}(b_l)) = (s_{\mu j}(a_l x a_{l'}^{-1}))$ 这样的 (m, m) 型矩陣不外于 $\Sigma(b_l)$。$P(x)$ 能够由把 $(\delta_{il'})$ 矩陣中的 0 用 $O_{m,m}$ 替换，在第 l 行第 l' 列的 1 用 $\Sigma(b_l) = \Sigma(a_l x a_{l'}^{-1})$ 替换得到是容易理解的❶。

---

❶ 由 $\rho(x)f_{ij} = \sum_{l=1}^{k}\delta_{il'}\sum_{\mu=1}^{m}s_{\mu j}(b_l)f_{l\mu}$，令 $i=1, 2, \cdots, k$ 得

$$\rho(x)f_{1j} = \delta_{1l'(1)}\sum_{\mu=1}^{m}s_{\mu j}(b_1)f_{1\mu} + \delta_{1l'(2)}\sum_{\mu=1}^{m}s_{\mu j}(b_2)f_{2\mu} + \cdots + \delta_{1l'(k)}\sum_{\mu=1}^{m}s_{\mu j}(b_k)f_{k\mu}.$$

再令 $j=1, 2, \cdots, m$，則 $\rho(x)f_{11}$, $\rho(x)f_{12}$, $\cdots$, $\rho(x)f_{1m}$ 中的 $\delta_{1l'(1)}$, $\delta_{1l'(2)}$, $\cdots$, $\delta_{1l'(k)}$ 与上式的完全一样，因为只有 1 个 $l'(p)=1$，所以

$$f_{11}, \cdots, f_{1m}, f_{21}, \cdots, f_{2m}, \cdots, \quad f_{p1}, \cdots, \quad f_{pm}, \cdots, f_{k1}, \cdots, f_{km},$$

$$\rho(x)f_{11} = 0+\cdots+0+0+\cdots+0+\cdots+\left(\sum_{\mu=1}^{m}s_{\mu 1}(b_p)f_{p\mu}\right)+\cdots+0+\cdots+0+\cdots+0,$$

$$\rho(x)f_{12} = 0+\cdots+0+0+\cdots+0+\cdots+\left(\sum_{\mu=1}^{m}s_{\mu 2}(b_p)f_{p\mu}\right)+\cdots+0+\cdots+0+\cdots+0,$$

…………………………………………………………

$$\rho(x)f_{1m} = 0+\cdots+0+0+\cdots+0+\cdots+\left(\sum_{\mu=1}^{m}s_{\mu m}(b_p)f_{p\mu}\right)+\cdots+0+\cdots+0+\cdots+0,$$

其中 $s_{\mu j}(b_p)$ 是 $\sigma(b_p)$ 的矩陣元。于是 $\rho(x)$ 的表現矩陣 $P(x)$ 的前 m 行具有下面形式

$$m\text{ 行}\left\{\begin{array}{ccccccc} 0\cdots0 & 0\cdots0 & \cdots & s_{11}\cdots s_{m1} & \cdots & 0\cdots0 \\ \underbrace{0\cdots0}_{m\text{ 列}} & \underbrace{0\cdots0}_{m\text{ 列}} & \cdots & \underbrace{s_{1m}\cdots s_{mm}}_{m\text{ 列}} & \cdots & \underbrace{0\cdots0}_{m\text{ 列}} \end{array}\right.$$

共有 k 个 m 行 m 列矩陣，其中只第 p 个不为 0。

对于其他的行也一样，但由于只有一个 q 能使 $l'(q)=2$，而且 $p \neq q$，所以在 $P(x)$ 的第 $m+1$ 行到第 $m+m$ 这 m 行中只有第 q 个 m 行 m 列的矩陣不为 0，其余 $k-1$ 个都是 0。

因此 $\rho(x)$ 对于基底 f_{ij} 的表现矩陣是上面所說的那样。——譯者注

上面的 $s_{\mu\nu}$ 可以看成 $A(H)$ 中元，对于 $b\in H$ 被定义取 C 中值的函数，更一般对于 $g\in A(H)$，$x\in G$，由

$$g^0(x)=\begin{cases} g(x), & x\in H, \\ 0, & x\notin H \end{cases}$$

定义 $g^0\in A(G)$，命

$$P_{\varkappa\lambda}(x)=(s^0_{\mu\nu}(a_\varkappa x a_\lambda^{-1})\quad(\varkappa,\lambda=1,\cdots,k),$$

那末

$$P(x)=\begin{pmatrix} P_{11}(x) & \cdots & P_{1k}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{k1}(x) & \cdots & P_{kk}(x) \end{pmatrix}.$$

实际上，假如 $\lambda\neq l'$，那末 $P_{l\lambda}(x)=(s^0_{\mu\nu}(a_l x a_\lambda^{-1}))=O_{m,m}$，$P_{ll'}(x)=(s_{\mu\nu}(a_l x a_{l'}^{-1}))=\sum(b_l)$，所以上述成立。

特别❶，

$$(\chi_\rho x)=SP(x)=\sum_{\varkappa=1}^{k}SP_{\varkappa\varkappa}(x)=\frac{1}{h}\sum_{a\in G}\chi^0_\sigma(axa^{-1}).\quad(35.2)$$

例 1　假如 $H=\{e\}$，那末 ρ 是右正則表現，假如 $G=H$，那末 $\rho\sim 0$。

例 2　$G=\mathfrak{S}_3$ 的子群 $H=\{1,(12)\}$ 的既約表現有恒等表現，交代表現两个。求分別由它們誘导的 G 的表現 $\rho^{(1)}$，$\rho^{(2)}$。假定 $G=H\cdot 1+H\cdot(13)+H\cdot(23)$，求 G 由 H 的交代表現誘导的矩陣表現即得下面的結果。

---

❶　因为 $\chi_\rho(x)=\sum_{\varkappa=1}^{k}SP_{\varkappa\varkappa}(x)$，这里 $P_{\varkappa\varkappa}(x)=0$，当 $l'(\varkappa)\neq\varkappa$，$P_{\varkappa\varkappa}(x)=(s_{\nu\mu}(b_{l'(\varkappa)}))$，当 $l'(\varkappa)=\varkappa$。但这时 $a_l x=b_l a_{l'}$ 所以 $a_\varkappa x=b_\varkappa a_\varkappa$ 因此 $b_\varkappa=a_\varkappa x a_\varkappa^{-1}$。于是只有存在 $a_\varkappa$ 使 $b_\varkappa=a_\varkappa x a_\varkappa^{-1}\in H$ 时 $\chi_\rho(x)\neq 0$ 并且

$$\chi_\rho(x)=SP_{\varkappa\varkappa}(x)=\chi_\sigma(b_\varkappa)=\chi_\sigma(a_\varkappa x a_\varkappa^{-1})$$

又因为，假如 $a_\varkappa x a_\varkappa^{-1}\in H$，那末对于任意 H 中元 y，$(ya_\varkappa)x(ya_\varkappa^{-1})\in H$。显然 $a_\varkappa x a_\varkappa^{-1}$ 与 $(ya_\varkappa)x(ya_\varkappa)^{-1}$ 共軛并且都属于 H。因为 y 有 h 个，所以

$$\chi_\rho(x)=\frac{1}{h}\sum_{y\in H}\chi_\sigma((ya_\varkappa)x(ya_\varkappa)^{-1}).$$

假如令 $g^0(x)=\begin{cases} g(x), & \text{当 } x\in H \\ 0, & \text{当 } x\notin H, \end{cases}$ 那末上式可記成 $\chi_\rho(x)=\frac{1}{h}\sum_{a\in G}\chi^0_\sigma(axa^{-1})$。实际上，如果 $l'(\varkappa)=\varkappa$，那末上式中的 a 必为 $ya_\varkappa$，$y\in H$ 的形状，否則 $\chi^0_\sigma(axa^{-1})=0$。——譯者注

$$P^{(2)}(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P^{(2)}((1\,2))=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$P^{(2)}((1\,3))=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad P^{(2)}((2\,3))=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$P^{(2)}((1\,2\,3))=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad P^{(2)}((1\,3\,2))=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

$P^{(1)}$ 显然能够将 $P^{(2)}$ 中 -1 都用 1 替换得出。因此

$$\chi_{\rho^{(1)}}=(3,\ 1,\ 0),\quad \chi_{\rho^{(2)}}=(3,\ -1,\ 0).$$

把它与 §33 例 5 的表比較，显然有下面关系

$$\rho^{(1)}=\rho_1\oplus\rho_3,\quad \rho^{(2)}=\rho_2\oplus\rho_3.$$

这里，ρ_1，ρ_2，ρ_3 分别是 G 的恒等表現，交代表現，2 級既約表現。

对于上面的 $g\in A(H)$ 使 $g^0\in A(G)$ 对应的映射是自 $A(H)$ 到 $A(G)$ 中的同构映射，但对于 $f\in A(G)$ 使它到 H 的縮小 $f|H=\hat{f}$ 对应的映射是自 $A(G)$ 到 $A(H)$ 上的同态映射。

例 3 假定 ρ 是 G 的任意表現，那末 ρ 到 H 的縮小 $\rho|H=\hat{\rho}$ 給出 H 的表現（$\hat{\rho}$ 的表現空間与 ρ 的相同。但 ρ 是既約，$\hat{\rho}$ 不一定是既約）。如果 ρ 的矩陣表現是 $G\ni x\to P(x)=(p_{ij}(x))$，那末 $\hat{\rho}$ 的一个矩陣表現能够用 $H\ni y\to\hat{\rho}(y)=(\hat{p}_{ij}(y))$ 給出。

对于 $g\in A(H)$，命 $g^0=f$，显然 $\hat{f}=\hat{g}^0=g$。但对于 $f\in A(G)$，如果命 $\hat{f}=g$，一般 $g^0=\hat{f}^0$ 与 f 不相同。这是因为 f 与 $\hat{f}^0$ 对于 H 中元取相同的值，但对于 $x\notin H$ 的 x，$\hat{f}^0(x)=0$，而 $f(x)$ 一般不为 0（$x\notin H\Rightarrow f(x)=0$ 时，并且限于这时，$f=\hat{f}^0$）。于是下面的命题成立。

命題 15 $g_1\in A(H)$ 时，$fg_1^0=\hat{f}^0g_1^0$。

証明 假如 $x\notin H$，那末 $f(x)g_1^0(x)=\hat{f}^0g_1^0(x)=0$。假如 $y\in H$，那末 $f(y)g_1^0(y)=\hat{f}^0(y)g_1^0(y)=f(y)g_1(y)$。（証毕）

假定 G，H 的类函数（§33）的全体分别用 $C(G)$，$C(H)$ 表

示，那末 $C(G)$，$C(H)$ 分別是 $A(G)$，$A(H)$ 的可換子环。如果 $g\in C(H)$，不一定 $g^0\in C(G)$，但

$$g^*(a)=\frac{1}{h}\sum_{x\in G}g^0(xax^{-1})$$

是 $C(G)$ 中元。$g\to g^*$ 成为自 $C(H)$ 到 $C(G)$ 中的綫性映射。

例 4 用这記法，上式 (35.1) 能够写成下面形状。假如 G 由 H 的表現 σ 誘导的表現是 ρ，那末

$$\chi_\rho=\chi_{\sigma^*}.$$

在 $A(G)$ 中，对于 $f_1, f_2\in A(G)$，能够由

$$(f_1, f_2)=\frac{1}{n}\sum_{x\in G}f_1(x)\overline{f_2(x)}$$

定义内积 (§ 31)。与这同样意义，在 $A(H)$ 定义的内积用

$$\langle g_1, g_2\rangle=\frac{1}{h}\sum_{y\in H}g_1(x)\overline{g_2(y)},\quad g_1, g_2\in A(H)$$

表示。这时下面的定理成立。

定理 25 假定 f, g 分別是 $C(G)$, $C(H)$ 中任意两元，那末

$$(f, g^*)=\langle\hat{f}, g\rangle$$

成立。

它叫做 **Frobenius 的相互律**。

証明中需用下面的引理。

引理 对于 G 中任意元 y，使 $xax^{-1}=y$ 这样的 G 中元 a, x 的組 (a, x) 正好只有 $n(=G$ 的阶$)$ 个。

証明 x 自 G 中任意取，如果 $a=x^{-1}yx$，那末 $xax^{-1}=y$。又要 $xax^{-1}=y$ 成立，必須 $a=x^{-1}yx$。

定理 25 的証明 由 g^* 的定义，f 是类函数及由命題 15 得

$$f(a)\overline{g^*(a)}=\frac{1}{h}\sum_{x\in G}f(a)\overline{g^0(xax^{-1})}=\frac{1}{h}\sum_{x\in G}f(xax^{-1})\overline{g^0(xax^{-1})}$$

$$=\frac{1}{h}\sum_{x\in G}\hat{f}^0(xax^{-1})\,\overline{g^0(xax^{-1})},$$

所以

$$(f,\ g^*)=\frac{1}{nh}\sum_{a\in G}\sum_{x\in G}\hat{f}^0(xax^{-1})\overline{g^0(xax^{-1})}. \qquad (35.3)$$

在这右边的各項中，如果 $xax^{-1}\notin H$，它就是0，如果 $xax^{-1}=y\in H$，它就取与 $\hat{f}(y)\overline{g(y)}$ 相同的值。并且对于給出的 $y\in H$ 滿足 $xax^{-1}=y$ 这样的組(a,x)的个数由引理正好只有 n 个。把(35.3)中右边关于这 n 个 $(a,\ x)$ 組的項先平均就得到

$$(f,\ g^*)=\frac{1}{h}\sum_{y\in H}\hat{f}(y)\overline{g(y)}=\langle\hat{f},\ g\rangle.$$

系 1 假定 ρ 是由 H 的表現 σ 誘导的 G 的表現，如果 f 是 $A(G)$ 中任意元，那末

$$(f,\ \chi_\rho)=\langle\hat{f},\ \chi_\sigma\rangle.$$

系 2 假定 ρ_i 是 G 的旣約表現，σ 是 H 的旣約表現，如果 ρ 是由 σ 誘导的 G 的表現，那末

$$(\rho:\rho_i)=(\hat{\rho}_i:\sigma).$$

即在把 G 的旣約表現 ρ_i 縮小到子群 H 所得到的表現 $\hat{\rho}_i$ 中，H 的旣約表現 σ 的重复度等于在由 σ 誘导的 G 的表現 ρ 中 ρ_i 的重复度(也有叫这系做 Frobenius 的相互律的)。

証明 由系 1 与 §32 的命題 10 即得。

例 5 假定 G 的共軛类是 $C_1,\cdots,C_q$，H 是 G 的子群，如果 H 中两元 y_1,y_2 在 H 共軛——即存在 $y_1=yy_2y^{-1}$，$y\in H$ 这样的 y——当然 y_1，y_2 在 G 中也是共軛并且属于同一共軛类。反之，H 中两元在 G 中虽为共軛，但在 H 中不一定成为共軛。因此，假如 H 的共軛类是 $D_1,\ \cdots,\ D_r$，那末 $C_i\cap H$ 就成为几个 D_j 的和的集合。令命 $C_i\cap H=D_{j_1^{(i)}}+\cdots+D_{j_{l_i}^{(i)}}$，$\varphi_i$ 是 C_i 的定义函数，即

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1, & x\in C_i,\\ 0, & x\notin C_i\end{cases}$$

是 $A(G)$ 中元，假如 C_i 中元的个数是 n_i，由 H 的表現 σ 誘导的 G 的表現是 ρ，那末对于 $x_i\in C_i$，

$$\chi_\rho(x_i)=\frac{n}{n_i}(\chi_\rho,\ \varphi_i)=\frac{n}{n_i}\langle\chi_\sigma,\ \hat{\varphi}_i\rangle.$$

假如 D_j 中元的个数是 m_j，$D_j \ni y_j$，由这即得

$$\chi_\rho(x_i)=\frac{n}{n_i h}\left(m_{j_1^{(i)}}\chi_\sigma(y_{j_1^{(i)}})+\cdots+m_{j_{l_i}^{(i)}}\chi_\sigma(y_{j_{l_i}^{(i)}})\right).$$

例 6　5 阶交代群。

5 阶交代群用 $\mathfrak{A}_5$ 表示。(因为 $\mathfrak{A}_5$ 与使正 20 面体重合于它自身的运动所形成的群(143 頁)同构，所以也叫做**正 20 面体群**。) $\mathfrak{A}_5$ 由下面 60 个置换构成(以下表示共軛类分类。C_i，$i=1, \cdots, 5$ 是类的記号)。

	元的个数
C_1:1	1
C_2:(1 2)(3 4), …	15
C_3:(1 2 3), …	20
C_4:(1 2 3 4 5), …	12
C_5:(1 3 5 2 4), …	12

(上面的 C_4，C_5 在 5 阶对称群 $\mathfrak{S}_5$ 中是同类，但在 $\mathfrak{A}_5$ 中則属于异类。因为 $\mathfrak{S}_5=\mathfrak{A}_5+\mathfrak{A}_5(1\ 2)$，所以 $x, y\in\mathfrak{A}_5$ 在 $\mathfrak{S}_5$ 中虽属同类，当 $y=(1\ 2)x(1\ 2)$ 时，在 $\mathfrak{A}_5$ 中不一定属于同类)。

因为 $\mathfrak{A}_5$ 能够类分为这五个共軛类，所以有五个相异的既約表現类。假定它們的代表系是 ρ_i，$i=1, \cdots, 5$。特別，把 ρ_1 作为恒等表現，

$$\chi_{\rho_1}=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

第 2 既約表現 ρ_2，能够与 $\mathfrak{S}_3$，$\mathfrak{S}_4$ 的情况(176 頁，202 頁)同样求得。即对于 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5\end{pmatrix}\in\mathfrak{A}_5$ 使 $x(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$ 对应的表現假如是 ρ，那末

$$\chi_\rho=(5,\ 1,\ 2,\ 0,\ 0).$$

与 203 頁同样考察，因为 ρ 含 ρ_1 是明显的，所以如果 $\rho=\rho_1\oplus\rho_2$，那末

$$\chi_{\rho_2}=(4,\ 0,\ 1,\ -1,\ -1).$$

因为 $(\chi_{\rho_2}, \chi_{\rho_2})=1$，所以 ρ_2 是第 2 既約表現。

为了求剩下的三个既約表現，假定由 $a=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\in\mathfrak{A}_5$ 生成的 $\mathfrak{A}_5$ 的子群是 H，因为 $H=\{1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4\}$ 是 5 阶循环群，如果命 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{5}}$，那末由

$$\sigma_\mu(a)=\varepsilon^\mu,\quad \sigma_\mu(a^\nu)=\varepsilon^{\mu\nu}\quad(\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

能够得到 H 的所有既約表現。假定由这等表現誘导的 $\mathfrak{A}_5$ 的表現是 $\rho^{(\mu)}$，那末 $\rho^{(\mu)}$ 是 12 級表現。下面求 $\rho^{(\mu)}$ 的特征标。

因为 H 是可換群，所以它的共軛类都是只由一个元构成。因此 H 类分为五个共軛类，与 C_i 的关系列示如下：

$$
\begin{array}{lllll}
\mathfrak{A}_5 = C_1 + C_2 + C_3 & + C_4 & & + C_5 & \\
\cup \quad \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\
H = \{1\} & + \{a\} & + \{a^4\} & + \{a^2\} & + \{a^3\} \\
\chi_{\sigma_\mu} \quad 1 & \varepsilon^{\mu} & \varepsilon^{4\mu} & \varepsilon^{2\mu} & \varepsilon^{3\mu}
\end{array}
$$

于是由例5得

$$
\begin{aligned}
\chi_{\rho^{(\mu)}} &= \left(\frac{60}{1\times 5}\times 1,\ 0,\ 0,\ \frac{60}{12\times 5}(\varepsilon^{\mu}+\varepsilon^{4\mu}),\ \frac{60}{12\times 5}(\varepsilon^{2\mu}+\varepsilon^{3\mu}) \right) \\
&= (12,\ 0,\ 0,\ \varepsilon^{\mu}+\varepsilon^{-\mu},\ \varepsilon^{2\mu}+\varepsilon^{-2\mu}).
\end{aligned}
$$

命 $\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$，因为 $\chi_{\rho^{(1)}}=\chi_{\rho^{(4)}}$，$\chi_{\rho^{(2)}}=\chi_{\rho^{(3)}}$，所以得到下面三个特征标

$$
\begin{aligned}
\chi_{\rho^{(0)}} &= (12,\ 0,\ 0,\ 2,\ 2), \\
\chi_{\rho^{(1)}} &= \left(12,\ 0,\ 0,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \\
\chi_{\rho^{(2)}} &= \left(12,\ 0,\ 0,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

它們不是单純特征标。于是在这等表現中計算既得的既約表現 ρ_1，ρ_2 的重复度，把 $\rho^{(0)}$，$\rho^{(1)}$，$\rho^{(2)}$ 更分解

$$
\begin{aligned}
(\rho^{(0)}:\rho_1) &= (\chi_{\rho^{(0)}},\ \chi_{\rho_1}) = \frac{1}{60}\,(1\times 12\times 1 - 1\times 2\times 12 + 1\times 2\times 12) = 1, \\
(\rho^{(0)}:\rho_2) &= (\chi_{\rho^{(0)}},\chi_{\rho_2}) = \frac{1}{60}\,(4\times 12\times 1 + (-1)\times 2\times 12 + (-1) \\
&\qquad \times 2\times 12) = 0.
\end{aligned}
$$

所以分解 $\rho^{(0)}=\rho_1\oplus\rho_1'$，

$$
\chi_{\rho_1'} = \chi_{\rho^{(0)}} - \chi_{\rho_1} = (11,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1).
$$

ρ_1' 已不含 ρ_1，ρ_2。因为 $(\chi_{\rho_1'},\ \chi_{\rho_1'})=3$，所以 ρ_1' 是剩下的三个既約表現 ρ_3，ρ_4，ρ_5 的直和（假如 $\rho_1'=m_1\rho_3\oplus m_2\rho_4\oplus m_3\rho_5$，那末 $(\chi_{\rho_1'},\ \chi_{\rho_1'})=m_1^2+m_2^2+m_3^2$。因为 m_i 是非負的整数，所以不得不 $m_1=m_2=m_3=1$）。又因为 $(\rho^{(1)}:\rho_1)=0$，$(\rho^{(1)}:\rho_2)=1$，所以分解 $\rho^{(1)}=\rho_2\oplus\rho_2'$，$\rho_2'$ 不含 ρ_1，ρ_2。

$$
\chi_{\rho_2'} = \chi_{\rho^{(1)}} - \chi_{\rho_2} = \left(8,\ 0,\ -1,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).
$$

因为 $(\chi_{\rho_2'},\ \rho_{\rho_2'})=2$，所以 ρ_2' 是 ρ_3，ρ_4，ρ_5 中两个的直和。譬如 $\rho_2'=\rho_4\oplus\rho_5$，那末

$$
\chi_{\rho_3} = \chi_{\rho_1'} - \chi_{\rho_2'} = \left(3,\ -1,\ 0,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).
$$

同样，因为 $(\rho^{(2)}:\rho_1)=0$，$(\rho^{(2)}:\rho_2)=1$，所以 $\rho^{(2)}=\rho_2\oplus\rho_3'$，

$$\chi_{\rho_3'}=\left(8,\ 0,\ -1,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

因为 $(\chi_{\rho_3'},\ \chi_{\rho_3'})=2$，所以

$$\chi_{\rho_3'}-\chi_{\rho_3}=\left(3,\ -1,\ 0,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

它又是单純特征标。因为它与 ρ_3 不同，所以是第4个既約表現 ρ_4 的特征标。

最后一个特征标能够由第二直交关系求得。

类 / 元数 / 特征标	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	1	15	20	12	12
χ_{ρ_1}	1	1	1	1	1
χ_{ρ_2}	4	0	1	-1	-1
χ_{ρ_3}	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_{ρ_4}	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_{ρ_5}	5	1	-1	0	0

§36 特征标間的各种关系

把阶为 n 的有限群 G 类分为共軛类 $C_1, \cdots, C_q$，如果 C_i 的代表是 a_i，C_i 中元的个数是 n_i，那末 G 具有 q 个既約表現类，如果它的代表系是 $\rho_1, \cdots, \rho_q$，命 $\sqrt{\frac{n_i}{n}}\,\chi_{\rho_\nu}(a_i)=\beta_{\nu i}$，那末 $(\beta_{\nu i})$ 成为 $(q,\ q)$ 型酉矩陣这已在 §33 中叙述。又在 $\chi_{\rho_\nu}(a_i)$ 或 $\beta_{\nu i}$ 之間有下面各种关系。

(1) 假定对于 $x\in G$，f_x 是在 §29 中定义的 $A(G)$ 中元（即 $f_x(x)=1$；$x\neq y\Rightarrow f_x(y)=0$），对于各 C_i，命 $X_i=\sum\limits_{x\in C_i}f_x\,(\in A(G))$

(在 § 29 命题 5 的意义下如果把 x 与 f_x 同样看待，那就有 $X_i=\sum_{x\in C_i}x$。在以下的討論中，这方法考虑容易)。于是 $X_i\cdot X_j$ (作为 $A(G)$中元的积) 成为 $\sum_{x\in G}\alpha_x x$ 的形状，这时 α_x 显然是自然数或 0，假定 $x\sim y$ (x, y 共軛)，容易得知 $\alpha_x=\alpha_y$，所以

$$X_i\cdot X_j=\sum_{k=1}^{q}a_{ijk}X_k. \tag{36.1}$$

这里 a_{ijk} 是自然数或 0。

現在假定 ρ_ν 的矩陣表現是 P_ν，那末 $\sum_{x\in C_i}P_\nu(x)=T_{\nu i}\in\mathfrak{M}(d_\nu,\boldsymbol{C})$ (d_ν 是 ρ_ν 的級数) 与 $P_\nu(y)$, $y\in G$ 中任何个可换。实际上，当 x 在 C_i 中变动时，因为 yx 与 xy 作为全体是取相同的元，所以

$$P_\nu(y)T_{\nu i}=\sum_{x\in C_i}P_\nu(y)P_\nu(x)=\sum_{x\in C_i}P_\nu(yx)=\sum_{x\in C_i}P_\nu(xy)=T_{\nu i}P_\nu(y).$$

因此由 § 26 定理 3 的系 1 得 $T_{\nu i}=\tau_{\nu i}E_{d_\nu}$ $(\tau_{\nu i}\neq 0)$。因为 $\chi_{\rho_\nu}(x)=SP_\nu(x)$，$\chi_{\rho_\nu}$ 是类函数，所以

$$\sum_{x\in C_i}\chi_{\rho_\nu}(x)=n_i\chi_{\rho_\nu}(a_i)=d_\nu\tau_{\nu i}. \tag{36.2}$$

又因为 $P_\nu(xy)=P_\nu(x)P_\nu(y)$，所以由 (36.1) 得❶

$$T_{\nu i}\cdot T_{\nu j}=\sum_{k=1}^{q}a_{ijk}T_{\nu k},$$

因此

$$\tau_{\nu i}\cdot\tau_{\nu j}=\sum_{k=1}^{q}a_{ijk}\tau_{\nu k}. \tag{36.3}$$

它由 (36.2) 能够直接重写为 $\chi_{\rho_\nu}(a_i)$ 或 $\beta_{\nu i}$ 間的关系。它是酉矩陣 $(\beta_{\nu i})$ 中列之間的关系。

---

❶ 因为 $T_{\nu_i}=\sum_{x\in C_i}P_r(x)$，由 (36.1) 及 $D_r(xy)=P_r(x)P_r(y)$，即得

$$T_{\nu_i}T_{\nu_j}=(P_r(x_1+x_2+\cdots+x_{n_i}))(P_r(y_1+y_2+\cdots+y_{n_j})),$$

其中 $\quad x_1+x_2+\cdots+x_{n_i}=C_i,\quad y_1+y_2+\cdots+y_{n_j}=C_j$，

于是 $\quad T_{\nu_i}T_{\nu_j}=P_r[(x_1+x_2+\cdots+x_{n_i})(y_1+y_2+\cdots+y_{n_j})]=P_r(C_iC_j)$.

把 f_x 看成 x，由 (36.1) 得

$$T_{\nu_i}T_{\nu_j}=P_r\left[\sum_{k=1}^{q}a_{ijk}C_k\right]=\sum_{k=1}^{q}a_{ijk}P_r(C_k)=\sum_{k=1}^{q}a_{ijk}T_{rk}.$$ ——譯者注

由 (36.3)，又得知 $\tau_{\nu\mu}$ 是 $(q,\ q)$ 型矩陣 $(a_{ijk})_{j,k=1,\cdots,q}$ 的特征值。由这事实与 $a_{ijk}\in \boldsymbol{Z}$，根据数論的知識，能够导出下面定理。

定理 26　有限群的既約表現的級数是它的阶数的約数。

在这定理的証明中，代数整数的概念与它的简单性质都是需要的。又因为定理 26 是优美的定理，对它的証明也有兴趣，因此說得不免离正題稍远。兹叙述如下（自表現論的立場是不欢迎这样"离开正題"的証明的，但是其他简短的証明至今还沒有得到）。

首先是代数整数的定义，最高次的系数是 1，其他系数都 $\in \boldsymbol{Z}$ 这样代数方程的根，叫做**代数整数**。代数整数全体的集合用 $\boldsymbol{A}$ 表示。显然 $\boldsymbol{C}\supset\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{Z}$.

例 1　$\boldsymbol{Z}$ 中元的連乘根是代数整数，例如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{-1}$，$\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (1 的 3 乘根) $\in \boldsymbol{A}$.

例 2　假如 $\alpha\in\boldsymbol{A}$，那末 $\bar{\alpha}\in\boldsymbol{A}$.

〔解〕　因为把 α 作为根的实系数代数方程也把 $\bar{\alpha}$ 作为根（参照 112 頁命題 67 的証明中后段），所以显然成立。

命題 16　假定 ξ 是有理数并且是代数整数，那末 $\xi\in\boldsymbol{Z}$（因此 $\boldsymbol{Z}$ 中元也叫做**有理整数**）。

証明　假定 $\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_n=0$，$a_i\in\boldsymbol{Z}$，并且 ξ 是有理数。有理数 ξ 能够写成 $\xi=\dfrac{b}{a}$，$a,\ b\in\boldsymbol{Z}$，$(a,\ b)=1$，$a>0$ 的形状。这时証明 $a=1$ 即可。把 $\xi=\dfrac{b}{a}$ 代入上方程去分母得

$$b^n+a_1ab^{n-1}+\cdots+a_na^n=0, \tag{36.4}$$

如果 $a\neq1$，那就有 $p\mid a$ 这样的质数 p，因为 $(a,b)=1$，所以 $p\nmid b$. 但由 (36.4) 得

$$b^n=-a(a_1b^{n-1}+\cdots+a_na^{n-1}),$$

这右边能用 p 除尽，而左边不能用 p 除尽，由这不合理即得 $a=1$.

命題 17　由 $\boldsymbol{Z}$ 中元构成的正方矩陣的特征值是代数整数。

証明 假定 $a_{ij}\in \boldsymbol{Z}$, $i, j=1, \cdots, r$, 因为 $\boldsymbol{Z}$ 成为环，所以矩陣 $A=(a_{ij})$ 的特征多項式 $\Phi_A(x)$ (74 頁) 最高次的系数是 1, 其他系数是 $\boldsymbol{Z}$ 中元 (参照 74 頁例 3)。因此 A 的特征值，即 $\Phi_A(x)=0$ 的根是代数整数。

系 (36.3) 中 $\tau_{\nu\mu}$ 是代数整数。

命題 18 代数整数的和，差，积又是代数整数。

証明 先証明 $\xi, \eta\in \boldsymbol{A}\Rightarrow \xi+\eta\in \boldsymbol{A}$. 因为 $\xi, \eta\in \boldsymbol{A}$, 所以有满足

$$\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_n=0, \tag{36.5}$$

$$\eta^m+b_1\eta^{m-1}+\cdots+b_m=0 \tag{36.6}$$

的 $a_i, b_i\in \boldsymbol{Z}$. 今对于 $\nu=0, 1, \cdots, n-1$; $\mu=0, 1, \cdots, m-1$ 作 mn 个积 $\xi^\nu\eta^\mu$, 命 $\xi+\eta=\zeta$, 那末对于 $\nu<n-1$, $\mu<m-1$,

$$\xi^\nu\eta^\mu\zeta=\xi^{\nu+1}\eta^\mu+\xi^\nu\eta^{\mu+1},$$

对于 $\nu=n-1$, $\mu<m-1$, 用 (36.5),

$$\begin{aligned}\xi^{n-1}\eta^\mu\zeta&=\xi^n\eta^\mu+\xi^{n-1}\eta^{\mu+1}\\&=-a_1\xi^{n-1}\eta^\mu-\cdots-a_n\eta^\mu+\xi^{n-1}\eta^{\mu+1}.\end{aligned}$$

因为对于 $\mu=m-1$ 时也能够用 (36.6) 同样改写，所以如果命 1, ξ, η, $\xi\eta$, $\cdots$, $\xi^{n-1}\eta^{m-1}$ 这 mn 个积分别为 (任意的，但依一定的順序) $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l$ $(l=mn)$, 那末

$$\omega_i\zeta=\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\omega_j$$

中 $a_{ij}\in \boldsymbol{Z}$. 所以 ζ 是由 $\boldsymbol{Z}$ 中元构成的正方矩陣 (a_{ij}) 的特征值[1],

---

[1] 命 $F=(a_{ij})$, $x=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_l\end{pmatrix}$, 那末

$$Fx=(a_{ij})\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{l}a_{1j}\omega_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{l}a_{lj}\omega_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_1\zeta\\ \vdots\\ \omega_l\zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_l\end{pmatrix}\zeta.$$

即 $Fx=\zeta x$, 所以 ζ 是 (a_{ij}) 的特征値。——譯者注

由命題17，$\zeta\in \boldsymbol{A}$。

$\xi-\eta\in \boldsymbol{A}$，$\xi\eta\in \boldsymbol{A}$ 都能够完全同样証明。

系　$\boldsymbol{A}$ 成为 $\boldsymbol{C}$ 的子环。

例 3　有限群的任意特征标 χ 所取的值是代数整数。

［解］　χ 所取的值是1的連乘根的和（194頁例4）。因此由上例1与命題18，显然成立。

定理26的証明　由201頁（33.2），$\sum_{i=1}^{q} n_i\chi_{\rho_\nu}(a_i)\overline{\chi_{\rho_\nu}(a_i)}=n$，所以由（36.2），$\sum_{i=1}^{q}\tau_{\nu_i}\overline{\chi_{\rho_\nu}(a_i)}=\frac{n}{d_\nu}$。但由命題17系，$\tau_{\nu_i}\in \boldsymbol{A}$，又由例3及例2，$\overline{\chi_{\rho_\nu}(a_i)}\in \boldsymbol{A}$。于是由命題18，$\frac{n}{d_\nu}\in \boldsymbol{A}$。因为 $\frac{n}{d_\nu}$ 是有理数，所以由命題16，$\frac{n}{d_\nu}\in \boldsymbol{Z}$，即 $d_\nu\mid n$。

例 4　在 $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ 中既約表現的級数都是阶数的約数。在 d_ν 之間还有关系 $\sum_{\nu=1}^{q} d_\nu^2=n$（定理17系1）。又 d_ν 中至少有一个（恒等表現的次数）是1，这都是大家知道的。注意这事实与 q 分别是3，5，5的情况，d_ν 的値不可能在表中所示的以外，这只要通过試行（否則将导出錯誤）就容易明白。一般（当 n 不太大时），d_ν 也能够这样求出。

	n	q	d_ν				
$\mathfrak{S}_3$	6	3	1	1	2		
$\mathfrak{S}_4$	24	5	1	1	2	3	3
$\mathfrak{A}_5$	60	5	1	3	3	4	5

例 5　因为在（36.1）中显然 $X_iX_j=X_jX_i$，所以 $a_{ijk}=a_{jik}$。又假如共軛类 $\{e\}$ 用 C_1 表示，对于 C_i，由 C_i 中元的逆元形成的共軛类（因为 $x\sim y\Rightarrow x^{-1}\sim y^{-1}$，所以 C_i 中元的逆元作成一个共軛类）用 $C_{i'}$ 表示，于是由（36.1），显然 $a_{ij1}=n_i\delta_{i'j}$，$a_{1jk}=a_{j1k}=\delta_{jk}$。又由結合律 $(X_iX_j)X_l=X_i(X_jX_l)$ 即得

$$\sum_{k=1}^{q} a_{ijk}a_{klm}=\sum_{k=1}^{q} a_{ikm}a_{jlk}.$$

（2）　命 $(\rho_\lambda\otimes\rho_\mu:\rho_\nu)=b_{\lambda\mu\nu}$，那末 $b_{\lambda\mu\nu}$ 当然是自然数或0，

$$\rho_\lambda\otimes\rho_\mu=\sum_{\nu=1}^{q} b_{\lambda\mu\nu}\rho_\nu.$$

因此由195頁命題9(iv)，得到关于 $\chi_{\rho_\nu}(a_i)$ 的关系

$$\chi_{\rho_\lambda}(a_i)\chi_{\rho_\mu}(a_i)=\sum_{\nu=1}^{q} b_{\lambda\mu\nu}\chi_{\rho_\nu}(a_i). \tag{36.7}$$

它是酉矩陣$(\beta_{\nu\kappa})$中行之間的关系。

例 6 假定ρ_1是恒等表現，$\rho_{\nu'}$是ρ_ν的反步表現，在$b_{\lambda\mu\nu}$之間也与例5同样存在

$$b_{\lambda\mu\nu}=b_{\mu\lambda\nu},\quad b_{1\mu\nu}=b_{\mu1\nu}=\delta_{\mu\nu},\quad b_{\lambda\mu1}=\delta_{\lambda'\mu},$$
$$\sum_{\kappa=1}^{q}b_{\lambda\mu\kappa}\,b_{\kappa\nu\sigma}=\sum_{\kappa=1}^{q}b_{\lambda\kappa\sigma}b_{\mu\nu\kappa}.$$

証明也与例5的情况同样。

例 7 在$\mathfrak{S}_3$的情况中存在

$$\rho_1\otimes\rho_\nu=\rho_\nu\otimes\rho_1=\rho_\nu\quad(\nu=1,2,3),$$
$$\rho_2\otimes\rho_2=\rho_1,\quad \rho_2\otimes\rho_3=\rho_3\otimes\rho_2=\rho_3,$$
$$\rho_3\otimes\rho_3=\rho_1\oplus\rho_2\oplus\rho_3.$$

这里ρ_1, ρ_2, ρ_3是依照202頁例5的記法。

(3) d_ν中等于1的个数由G的群构造确定，有下面的定理27。因为这定理需用“换位子”的概念来叙述，所以，首先应对此有所說明。

对于$x, y\in G$, $xyx^{-1}y^{-1}$是G中元，它叫做x, y的**换位子**(commutator)，用$C(x, y)$表示。$C(x, y)=e$是x, y为可换$(xy=yx)$的必要充分条件。一般，因为$xy=C(x, y)yx$，所以$C(x, y)$可以考虑为表示x, y“不可换的程度”。

例 8 $C(x, y)C(y, x)=e$, $C(zxz^{-1}, zyz^{-1})=zC(x, y)z^{-1}$.

x, y在G中变动时，用$C(x, y)$生成的G的子群叫做G的**换位子群**，用G'表示。象在例8的第二式那样，因为换位子$C(x,y)$的共軛元$zC(x, y)z^{-1}$是zxz^{-1}与zyz^{-1}的换位子，所以G'是G的正規子群。

命題 19 G/G'是可换群。又假如H是G的正規子群，G/H是可换，那末$H\supset G'$.

証明 因为$xy=C(x,y)yx$, $C(x,y)\in G'$，所以$xy\equiv yx(\mathrm{mod}\,G')$，因此$G/G'$是可换群。又假如$G/H$是可换群，那末$xy\equiv yx(\mathrm{mod}\,H)$.

于是 $C(x, y) \in H$ 对于所有的 $x, y \in G$ 成立。所以 $G' \subset H$.

定理 27 在有限群 G 的旣約表現中，級数 $d_\nu = 1$ 的个数等于 G 中换位子群 G' 的指数 $(G:G')$.

証明 假定 G 的旣約表現类的代表系 $\rho_1, \cdots, \rho_q$ 中 ρ_ν, $\nu=1, \cdots, k$ 是1級，其他 $(q-k)$ 个的級数 $\geqslant 2$. 因为 $\rho_\nu(G)$, $\nu=1, \cdots, k$ 可换，所以由上命題，$\operatorname{Ker}\rho_\nu \supset G'$. 于是把 G 类分为 G' 的剩余类，$G = a_1G' + \cdots + a_mG'$ 时，如果 $x \in a_iG'$, 那末 $\rho_\nu(x) = \rho_\nu(a_i)$. 假如由 $\bar{\rho}_\nu(a_iG') = \rho_\nu(a_i)$ 定义 $\bar{\rho}_\nu: G/G' \to V$ (G 的表現空間)，那末 $\bar{\rho}_\nu$ 成为可换群 G/G' 的旣約表現。反之，可换群 G/G' 的任意旣約表現 $\bar{\rho}$ 是1級的，它的核，取满足 $G \supset H \supset G'$ 的 G 的适当正規子群 H, 表为 H/G' 形状。于是对于 $x \in G$, 如果 $\rho(x) = \bar{\rho}(xG')$, 那末 ρ 成为 G 的1級旣約表現。因为 G 的1級旣約表現 ρ 与 G/G' 的旣約表現 $\bar{\rho}$ 之間上面的对应显然是一对一的，所以两者的个数相等。因为 G/G' 是可换，所以它的个数等于 G/G' 的阶 $(G:G')$.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_{ρ_1}	1	1	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	1	1	-1	-1
χ_{ρ_3}	1	1	-1	1	-1
χ_{ρ_4}	1	1	-1	-1	1
χ_{ρ_5}	2	-2	0	0	0

例 9 在四元数群 $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ (§29 例 4)，因为 $iji^{-1}j^{-1} = -1$，所以 Q 的换位子群 $Q'\{1, -1\}$ 与中心一致是容易明白的。又共軛类是 $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{-1\}$, $C_3 = \{i, -i\}$, $C_4 = \{j, -j\}$, $C_5 = \{k, -k\}$ 5 个。

$Q/Q' = \{Q', iQ', jQ', kQ'\}$，它显然与四元群 (§34 例 2) 同构。所以 Q 有 4 个 1 級旣約表現 ρ_1、ρ_2, ρ_3, ρ_4. 它的特征标(或表現自身)与四元群的相同。因为 Q 自身不是可换，所以第 5 个旣約表現 ρ_5 的級数 $d_5 > 1$. 但因为 $8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$, 所以不得不 $d_5 = 2$. χ_{ρ_5} 能够由特征标的第二直交关系求出。其結果如上。

(4) 假定 ρ 是 n 阶群 G 的 d 級旣約表現，$G \ni x \to P(x)$ 是 ρ 的矩陣表現。如果 $P(x) = (a_{ij}(x))$, 那末由定理 12 (191 頁),

$$\sum_{x\in G}\alpha_{ij}(ax)\alpha_{ji}(bx^{-1})=\sum_{x\in G}\left\{\left(\sum_{k=1}^{d}\alpha_{ik}(a)\alpha_{kj}(x)\right)\left(\sum_{l=1}^{d}\alpha_{jl}(b)\alpha_{li}(x^{-1})\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\left(\sum_{x\in G}\alpha_{kj}(x)\alpha_{li}(x^{-1})\right)\alpha_{ik}(a)\alpha_{jl}(b)$$

$$=\frac{n}{d}\alpha_{ii}(a)\alpha_{jj}(b).$$

把第二边与最右边就 $i, j=1, \cdots, d$ 相加，再两边用 d 乘卽得

$$d\sum_{x\in G}\chi_\rho(axbx^{-1})=n\chi_\rho(a)\chi_\rho(b). \tag{36.8}$$

为了把这左边变形，考慮 b 的正規化群 $N(b)$。把 G 类分为关于 $\bmod N(b)$ 的左剩余类，假定 $G=y_1N(b)+\cdots+y_mN(b)$，$m=(G:N(b))$ 等于 G 中与 b 共軛的元的个数。与 b 共軛的元用 $b_1, \cdots, b_m(b_1=b)$ 表示。又因为 $z\in N(b)\Leftrightarrow zbz^{-1}=b$，$N(b)$ 的阶 $=\frac{n}{m}$，(36.8)的左边能够变形如下:

$$d\sum_{i=1}^{m}\sum_{z\in N(b)}\chi_\rho(ay_izbz^{-1}y_i^{-1})=d\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m}\chi_\rho(ay_iby_i^{-1})$$

$$=\frac{dn}{m}\sum_{i=1}^{m}\chi_\rho(ab_i).$$

因此，由(36.8)得到下面的关系:

$$m\chi_\rho(a)\chi_\rho(b)=d\sum_{i=1}^{m}\chi_\rho(ab_i). \tag{36.9}$$

这是矩陣 $(\chi_{\rho_\nu}(a_i))$ 或 $(\beta_{\nu i})$ 中列之間的又一个关系。

以上是作为証明下面定理的准备。

定理 28 假定 G 是有限群，$A(G)$ 是它的群代数，$C(A(G))=C(G)$ 是 $A(G)$ 的中心，卽 G 的类函数的集合。那末 $\chi\in A(G)$ 满足下面条件 (i)～(v)，是 χ 成为 G 的单純特征标的必要充分条件。

(i) $\chi\in C(G)$， (ii) $(\chi, \chi)=1$， (iii) $\chi(e)\in \boldsymbol{R}$, $\chi(e)>0$.
(iv) $\chi(x^{-1})=\overline{\chi(x)}$.

(v) 假定 a, b 是 G 中任意两元，$\{b_1, \cdots, b_m\}$ 是与 b 共軛元

全体的集合时，

$$m\chi(a)\chi(b)=\chi(e)(\chi(ab_1)+\cdots+\chi(ab_m)).\qquad(36.10)$$

証明 这等条件是必要。假定 χ 是 G 的某既約表現 ρ 的特征标 χ_ρ，那末(i)，(ii)，(iv)成立，已在§33，§32中明示。因为 $\chi(e)=(\rho$ 的級数)，所以(iii)也是明显的。又(v)成立在上面已証明。

下面示(i)~(v)是充分的。再把 ρ 作为 G 的任意既約表現，那末

$$m\chi_\rho(a)\chi_\rho(b)=\chi_\rho(e)(\chi_\rho(ab_1)+\cdots+\chi_\rho(ab_m))\qquad(36.10')$$

成立。把 G 类分为共軛类 $C_1,\cdots,C_q$，自各类 C_i 取代表 $b^{(i)}$，C_i 中元的个数假定是 n_i，在(36.10)，命 $b=b^{(i)}$，那末

$$n_i\chi(a)\chi(b^{(i)})=\chi(e)(\chi(ab_1^{(i)})+\cdots+\chi(ab_{n_i}^{(i)})).$$

在这式两边乘以 $\chi_\rho((b^{(i)})^{-1})$，就 $i=1,\cdots,q$ 相加，卽得

$$n\chi(a)(\chi,\chi_\rho)=\chi(e)(\chi\cdot\chi_\rho(a)),\qquad(36.11)$$

但 (χ,χ_ρ) 是在 $A(G)$ 的內积(§31)，$\chi\cdot\chi_\rho$ 是 $A(G)$ 中两元 χ,χ_ρ 的积(§29)。在(36.10′)中把 χ,χ_ρ 互换，完全同样得到

$$n\chi_\rho(a)(\chi_\rho,\chi)=\chi_\rho(e)(\chi_\rho\cdot\chi)(a).\qquad(36.11')$$

这里因为 $\chi\in C(G)$，所以 $\chi\cdot\chi_\rho=\chi_\rho\cdot\chi$。因此由(36.11)，(36.11′)[用(iii)]得

$$\frac{\chi(a)}{\chi(e)}(\chi,\chi_\rho)=\frac{\chi_\rho(a)}{\chi_\rho(e)}(\chi_\rho,\chi).$$

但 $(\chi_\rho,\chi)=\frac{1}{n}\sum_{x\in G}\chi_\rho(x^{-1})\overline{\chi(x^{-1})}=\frac{1}{n}\sum_{x\in G}\chi(x)\overline{\chi_\rho(x)}=(\chi,\chi_\rho)$，因此

$$\left(\frac{\chi(a)}{\chi(e)}-\frac{\chi_\rho(a)}{\chi_\rho(e)}\right)(\chi,\chi_\rho)=0\qquad(36.12)$$

对于所有的 $a\in G$ 成立。当 ρ 在既約表現的代表系 $\{\rho_1,\cdots,\rho_q\}$ 上变动时，因为 χ_{ρ_i} 是 $C(G)$ 的基底，所以由(i)，

$$\chi=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\chi_{\rho_i},$$

因为 $(\chi_{\rho_i}, \chi_{\rho_j})=\delta_{ij}$，所以 $(\chi, \chi)=\sum|\lambda_i|^2$，$(\chi, \chi_{\rho_i})=\lambda_i$。由 (ii) $\lambda_i=(\chi, \chi_{\rho_i})$ 中必定有不是 0 的。假定(36.12)中的 ρ 使 $(\chi, \chi_\rho)\neq 0$，那末

$$\frac{\chi(a)}{\chi(e)}=\frac{\chi_\rho(a)}{\chi_\rho(e)}$$

对于所有的 $a\in G$ 成立，即 $\chi=c\chi_\rho\left(c=\dfrac{\chi(e)}{\chi_\rho(e)}\right)$，但由(ii)，$|c|^2=1$，更由(iii)不得不 $c=1$。 （証毕）

关于构造簡单的群，利用定理 28——作为函数方程(i)～(iv)的解——能够求出单純特征标。

例 10 4 阶 2 面体群 D_4。

一般在空間內有正 n 角形 P_n 时，把 P_n 重合于它自身的空間运动形成的群叫做 n 阶 **2 面体群** (dihedral group)，用 D_n 表示。假定 P_n 的平面是 α，它的中心是 O，过 O 垂直 α 的直綫是 l，連結 O 与一个(确定的)頂点 A 的直綫是 m，那末 D_n 能够由繞 l 旋轉 $\frac{2\pi}{n}$ 的旋轉 a 与繞 m 旋轉 π 的旋轉 b 生成，具有 $e, a, a^2, \cdots, a^{n-1}, b, ab, \cdots, a^{n-1}b$ 这样的 $2n$ 个元。在生成元之間 $a^n=e$，$b^2=e$，$bab=a^{-1}$ 关系成立(这里譬如 ab 表示先施行运动 b，次施行运动 a 的結果)。

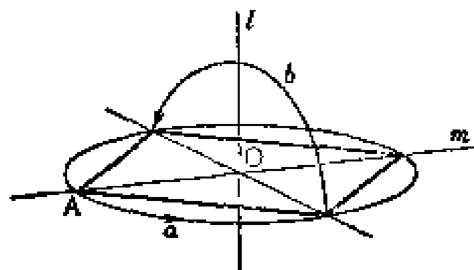


图 36.1

特别，考虑 D_4 的情况。把 D_4 中八个元类分为共軛类成为 $C_1=\{e\}$，$C_2=\{a^2\}$，$C_3=\{a, a^{-1}=a^3\}$，$C_4=\{b, a^2b=ba^2\}$，$C_5=\{ab=ba^{-1}, a^{-1}b=ba\}$ 五个。χ 假定是单純特征标，因为这里各元与它的逆元属于同一共軛类，由定理 28(ii)，

$$8(\chi, \chi)=\chi(e)^2+\chi(a^2)^2+2(\chi(a)^2+\chi(b)^2+\chi(ab)^2)=8 \qquad (1)$$

成立。又命 $\chi(e)=d$，那末由(iii)，$d>0$，并且由(v)，

$$\chi(a^2)^2=d^2,\ 2\chi(a)^2=d(\chi(a^2)+d),\ 2\chi(b)^2=d(d+\chi(a^2)),$$
$$2\chi(ab)^2=d(d+\chi(a^2)) \qquad (2)$$

成立。把它代入(1)，

$$2d^2+3d(d+\chi(a^2))=8, \qquad (3)$$

由(2)的第一式，

$$\chi(a^2)=\pm d.$$

(i) $\chi(a^2)=d$ 时，由(3)，$8d^2=8$. 所以 $d=1$. 于是由(2)，$\chi(a)^2=\chi(b)^2=\chi(ab)^2=1$. 并且 $\chi(a)$, $\chi(b)$, $\chi(ab)$ 都等于 ±1. 但再用(iv)得到

$\chi(a)\chi(b)=\chi(ab)$, $\chi(b)\chi(ab)=\chi(a)$, $\chi(ab)\chi(a)=\chi(b)$, (4) 所以 $\chi(a)$, $\chi(b)$, $\chi(ab)$ 中等于 -1 的必定是偶数个(0 或 2 个)。因此函数 χ 是下表中 χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 四个。

(ii) $\chi(a^2)=-d$ 时，由(3)，$2d^2=8$. 所以 $d=2$, 并且由(2)得 $\chi(a)=\chi(b)=\chi(ab)=0$. 它的解假定是 χ_5.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

而且，(1)，(2)，(4) 是 D_4 中单純特征标满足的必要条件。但作为这等函数方程的解只得到 $\chi_1, \cdots, \chi_5$ 五个。并且因为单純特征标的个数正好是 5，所以它們給出所有的单純特征标。

这特征标的表与在例 9 中所举的四元数群的特征标的表完全相同。但这两个群不同构。一般假定 p 是任意质数时对于阶 p^3 的群同样事实成立是大家熟知的。

§37 群代数 $A(G)$ 的理想及冪等元

假定有限群 G 的共軛类的个数是 q，那末在 G 正好有 q 个既約表現类。如果它的代表系是 $\rho_1, \cdots, \rho_q$, ρ_i 的級数是 d_i, 那末 G 的群代数 $A(G)$ 与 q 个矩陣环的直和 $\mathfrak{M}(d_1, C)\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}(d_q, C)$ 同构的事实在定理 19 已明示。在本节将引用这事实来研究作为 G 的表現空間的 $A(G)$ 的构造。

假定 f 是 $A(G)$ 中任意元，那末 $S=A(G)\cdot f$ 显然是 $A(G)$ 的子空間，并且

$$S\ni x,\ A(G)\ni a\Rightarrow ax\in S \tag{37.1}$$

成立。

一般对于代数 R 的子空間 S，

$$S \ni x,\ R \ni a \Rightarrow ax \in S \tag{37.2}$$

成立时，S 叫做 R 的**左理想**❶，

$$S \ni x,\ R \ni a \Rightarrow xa \in S \tag{37.3}$$

成立时，S 叫做 R 的**右理想**。又

$$S \ni x,\ R \ni a \Rightarrow ax,\ xa \in S \tag{37.4}$$

成立时，S 叫做 R 的**两側理想**。(37.1) 表示 $A(G)f$ 是 $A(G)$ 的左理想。

例 1　假定 $f \in A(G)$，那末 $fA(G)$ 是 $A(G)$ 的右理想。又在上述自 $\mathfrak{M}(d_1, C) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}(d_g, C)$ 到 $A(G)$ 的同构对应中，$\mathfrak{M}(d_i, C)$ 到 $A(G)$ 中的象如果是 $A^{(i)}$，那末 $A^{(i)}$ 是 $A(G)$ 的两側理想。

［解］ $fA(G)$ 是 $A(G)$ 的右理想是明显的。又証明 $A^{(i)}$ 是 $A(G)$ 的两側理想时，只要証明 $\mathfrak{M}(d_i, C)$ 是 $\mathfrak{M}(d_1, C) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}(d_g, C)$ 的两側理想即可。但这由矩陣的加法，乘法的定义容易明白。

例 2　S 是 R 的两側理想时，对于 $a,\ b \in R$，定义

$$a - b \in S \Leftrightarrow a \equiv b \pmod S,$$

那末这"相合关系"是等价关系，

$$a \equiv b,\ a' \equiv b' \pmod S \Rightarrow a \pm a' \equiv b \pm b',\ aa' \equiv bb' \pmod S.$$

所以 $a,\ a'$ 关于 mod S 的"相合类" $(a)_S$，$(a')_S$ 之間由

$$(a)_S \pm (a')_S = (a \pm a')_S,\ (a)_S(a')_S = (aa')_S$$

能够引入和，差，积。这样就得到与 R 同态的代数 $R \bmod S$。在这意义下，代数的两側理想是与群的正規子群相对应的。

象在 §29 所叙述，$A(G)$ 是 G 的正則表現的表現空間，$A(G)$ 的左理想不外于作为 G 的左正則表現的表現空間 $A(G)$ 的不变子空間，因而 $A(G)$ 的左理想 S 又成为 G 的表現空間。当 $a \in G, f \in S$ 时，如果 $\rho(a)f = af \in S$，那末 ρ 是把 S 作为表現空間的 G 的左正則表現。

---

❶ "理想"（イデアル ideal）为"理想子代数"之簡称。——譯者注

异于 $\{0\}$ 的两侧理想除自身及 $\{0\}$ 之外不再含两側理想时，它叫做**最小两側理想**。同样，异于 $\{0\}$ 的左理想除自身及 $\{0\}$ 之外不再含左理想时，叫做**最小左理想**。$A(G)$ 的最小左理想假如作为表现空間来看，不外是既約不变子空間，所以也叫做**既約左理想**。不是既約的左理想叫做**可約左理想**。关于右理想也是同样。

由定理 5(171頁)，G 的任意表現空間 V 含其他表現空間 V' 时，存在滿足 $V=V'\oplus V''$ 这样的 G 的表现空間 V''. 今假定 $V=A(G)$，那末对于 $A(G)$ 的任意左理想 S_1，$A(G)$ 中有左理想 S_2 存在，使

$$A(G)=S_1\oplus S_2. \tag{37.5}$$

因为 $A(G)$ 有单位元 e，把它依 (37.5) 来分解，假定 $e=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_i\in S_i$，那末对于 $A(G)$ 中任意元 f 成为

$$f=f\cdot e=f\varepsilon_1+f\varepsilon_2.$$

但因为 S_i 是左理想，$\varepsilon_i\in S_i$，所以 $f\varepsilon_i\in S_i$，因此 $f\varepsilon_i$ 与把 f 依 (37.5) 分解时 S_i 的分量一致。特别，如果 $f=\varepsilon_1$，那末

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

由分解的唯一性，$\varepsilon_1^2=\varepsilon_1$，$\varepsilon_1\varepsilon_2=0$. 同样 $\varepsilon_2^2=\varepsilon_2$，$\varepsilon_2\varepsilon_1=0$. 一般环中元 2 乘不变的叫做**幂等元**。又环中两元 x, y 的积 xy 及 yx 都成为 0 时，x, y 叫做**直交**。因此 ε_1, ε_2 是相互直交的冪等元。再假定 $f\in S_1$，那末 $f\varepsilon_1=f$，$f\varepsilon_2=0$. 反之，假定 $f\varepsilon_1=f$，显然 $f\in S_1$. 由以上得到下面命題。

命題 20 $A(G)$ 的任意左理想 S 有冪等元 ε，并且能够写成 $S=A(G)\varepsilon$ 的形状。

例 3 0 是冪等元，几个相互直交的冪等元的和又是冪等元。

例 4 在矩陣代数 $\mathfrak{M}(r, C)$ (C 用任意体 F 来代替也可) 中，E_{ii} (只是第 (i, i) 元素是 1，其他所有元素是 0 的矩陣) 是冪等元。假如 $i\neq j$，那末 E_{ii} 与

E_{jj} 是相互直交的冪等元。因此，假如 δ_i 是取 1 或 0 值的 i 的函数时，$\delta_1 E_{11}+\delta_2 E_{22}+\cdots+\delta_r E_{rr}$ 也是冪等元。

例 5 $A(G)$ 的任意左理想能够分解为既約左理想的直和。

［解］ 由定理 5 自明。

今假定 $A(G)$ 的左理想 S_0 能够分解为几个左理想 $S_1, \cdots, S_r$ 的直和：

$$S_0=S_1\oplus\cdots\oplus S_r. \tag{37.6}$$

把 S_0 的冪等元 ε_0 依 (37.6) 分解，命

$$\varepsilon_0=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r, \tag{37.7}$$

那末 ε_i 是 S_i 的冪等元，并且当 $i\neq j$ 时 ε_i, ε_j 是直交，这与上面完全同样証明。

反之，假如 S_0 中冪等元 ε_0 是那样 r 个直交冪等元的和 $(r\geqq 2)$ $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r$，显然 $S_0=A(G)\varepsilon_0=A(G)\varepsilon_1\oplus\cdots\oplus A(G)\varepsilon_r$. $A(G)\varepsilon_i=S_i$ 是 $A(G)$ 的左理想。因此，假如 S_0 是既約理想，那末 S_0 的冪等元 ε_0 不能够分解为 (37.7) 的形状。能够分解为 (37.7) 那样直交冪等元的和的冪等元，叫做**可約的**，非 0 的冪等元不能够那样分解时，叫做**既約的**。由这定义，下面的命题显然成立。

命題 21 假如 ε_0 是既約冪等元，那末 $A(G)\varepsilon_0$ 是 G 的既約表現空間。假如 ε_0 是可約冪等元，那末 $A(G)\varepsilon_0$ 是 G 的可約表現空間。

由前面所述的事实及这命题得知，求 G 的既約表現空間的問題归結于求 $A(G)$ 中既約冪等元的問題。当 ε_0 是既約冪等元时，把 $A(G)\varepsilon_0$ 作为表現空間的既約表現 ρ_0 叫做"由冪等元 ε_0 得到的表現"。反之，既約表現 ρ_0 的表現空間 $A(G)$中理想的冪等元 ε_0 叫做"由表現 ρ_0 得到的冪等元"。又由两个既約冪等元 ε_1, ε_2 所得到的表現 ρ_1, ρ_2 是等价时，冪等元 ε_1, ε_2 叫做**等价**，用 $\varepsilon_1\sim\varepsilon_2$ 表示。

命題 22 假定 $\varepsilon_i(i=1, 2)$ 是 $A(G)$ 的两个既約冪等元，为了

$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$，必要而充分的条件是$A(G)$中存在滿足$\varepsilon_1 f_1 \varepsilon_2 \neq 0$的元$f_1$。

証明 必要性．假定由ε_i得到的表現是ρ_i，$\rho_1 \sim \rho_2$即假定自$A(G)\varepsilon_1$到$A(G)\varepsilon_2$作为表現空間的同构映射φ存在。对于$A(G)$中任意元f, g，假如把$\rho_i(f)$作用于$g\varepsilon_i \in A(G)\varepsilon_i$，显然

$$
\begin{array}{ccc}
A(G)\varepsilon_1 & \xrightarrow{\rho_1(f)} & A(G)\varepsilon_1 \\
\varphi\downarrow & & \downarrow\varphi \\
A(G)\varepsilon_2 & \xrightarrow[\rho_2(f)]{} & A(G)\varepsilon_2
\end{array}
$$

$$\rho_i(f)g\varepsilon_i = fg\varepsilon_i.$$

并且[1]

$$f\varphi(g\varepsilon_1) = \varphi(fg\varepsilon_1). \tag{1}$$

今假定$\varphi(\varepsilon_1) = f_1$，在(1)如果命$f = g = \varepsilon_1$，那末$\varepsilon_1 f_1 = f_1$。因为$\varepsilon_1 \neq 0$，$\varphi$是同构映射，所以$f_1 \neq 0$，又因为$f_1 \in A(G)\varepsilon_2$，所以$f_1\varepsilon_2 = f_1$。于是$\varepsilon_1 f_1 \varepsilon_2 = f_1 \neq 0$。

充分性．假定$\varepsilon_1 f_1 \varepsilon_2 = f_2 \neq 0$，对于$A(G)\varepsilon_1$中元$g\varepsilon_1$，使$g\varepsilon_1 f_2$对应的映射如果是$\varphi$。因为$g\varepsilon_1 f_2 = (g\varepsilon_1 f_1)\varepsilon_2 \in A(G)\varepsilon_2$，所以$\varphi$是自$A(G)\varepsilon_1$到$A(G)\varepsilon_2$的綫性映射，显然(1)能够成立。因此$\varphi$是自$A(G)\varepsilon_1$到$A(G)\varepsilon_2$的协变变换(168頁)，所以由Schur引理，$\varphi = 0$或$\varphi$是同构映射，两者必居其一。但因为$\varphi(\varepsilon_1) = f_2 \neq 0$，所以$\varphi \neq 0$。因此$\varphi$不得不是同构映射。

系1 假定$a \in G$，如果$\varepsilon_2 = a\varepsilon_1 a^{-1}$，那末$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$。

証明 因为$\varepsilon_1 a^{-1} \varepsilon_2 = \varepsilon_1 a^{-1} \neq 0$，所以由上命題即得。

系2 假如$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$时，$f$是$A(G)$中滿足$\varepsilon_1 f \varepsilon_2 \neq 0$的元，那末$A(G)\varepsilon_2 = (A(G)\varepsilon_1)\varepsilon_1 f \varepsilon_2$。

証明 由上命題的証明中能够推得。

命題23 假定$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$，$A(G)$的两側理想$S$含$\varepsilon_1$，那末$S$又含$\varepsilon_2$。

証明 因为$\varepsilon_1 \in S$，S是左理想，所以$S \supset A(G)\varepsilon_1$。又因为

---

[1] 如果把$A(G)\varepsilon_1 = V_1$，$A(G)\varepsilon_2 = V_2$看成为$A(G)$的两个表現空間，令$g\varepsilon_1 = V_1$，那末(1)式就是$\rho_2(f)(\varphi(V_1)) = \varphi(\rho_1(f)V_1)$。——譯者注

S 是右理想，所以 $S\supset(A(G)\varepsilon_1)\varepsilon_1 f\varepsilon_2$。于是由前命题的系 2，$S\supset A(G)\varepsilon_2$。因为 $A(G)$ 具有单位元 ε，所以 $S\ni\varepsilon_2$。 （証毕）

在定理 19 的証明中，給出自 $\mathfrak{M}(d_i,C)$ 到 $A(G)$ 中的同构映射，即只在第 j 行第 k 列是 1，其他元都是 0 这样的 $\mathfrak{M}(d_i, C)$ 中元（(d_i,d_i) 型矩陣）假定是 $E^{(i)}_{jk}$ 时，如果用 § 33 的記法，使 $e^{(i)}_{jk}$ 表示的 $A(G)$ 中元与它对应就得到自 $\mathfrak{M}(d_i, C)$ 到 $A(G)$ 中的（$A^{(i)}$ 上的）同构对应 φ_i。由定理 18，d_i^2 个元 $\{e^{(i)}_{jk}\}$（$j=1,\cdots,d_i$, $k=1,\cdots,d_i$）构成 $A^{(i)}$ 的基底，由这对应这 $\sum\limits_{i=1}^{q} d_i$ 个 $e^{(i)}_{jj}$ 是 $A(G)$ 的既約幂等元，$A(G)e^{(i)}_{jk}$ 是 $A(G)$ 的既約左理想。这些都是明显的，此外有下面的命題。

命題 24 $\{e^{(i)}_{1k},\cdots,e^{(i)}_{d_ik}\}$ 是左理想 $A(G)e^{(i)}_{jk}$ 的基底。

証明 $\{e^{(i)}_{1k},\cdots,e^{(i)}_{d_ik}\}$ 是綫性无关是明显的。下面示明 $A(G)e^{(i)}_{jk}$ 能够由它們生成即可。假定

$$f\cdot e^{(i)}_{jk}\in A(G)e^{(i)}_{jk},\quad f=\sum_{i=1}^{q}\sum_{\mu=1}^{d_i}\sum_{\nu=1}^{d_i}\lambda^{(i)}_{\mu\nu}e^{(i)}_{\mu\nu},$$

因为

$$f\cdot e^{(i)}_{jk}=\sum_{\mu=1}^{d_i}\sum_{\nu=1}^{d_i}\lambda^{(i)}_{\mu\nu}e^{(i)}_{\mu\nu}e^{(i)}_{jk}=\sum_{\mu=1}^{d_i}\sum_{\nu=1}^{d_i}\lambda^{(i)}_{\mu\nu}\delta_{\nu j}e^{(i)}_{\mu k}=\sum_{\mu=1}^{d_i}\lambda^{(i)}_{\mu j}e^{(i)}_{\mu k},$$

所以它是显然的。 （証毕）

由这命題，$A(G)e^{(i)}_{jk}=A(G)e^{(i)}_{j'k}$。假如把它記成 $A^{(i)}_{k}$，那末 $A^{(i)}=A^{(i)}_{1}\oplus\cdots\oplus A^{(i)}_{d_i}$。

系 $A^{(i)}$ 是 d_i 个 d_i 級既約左理想的直和。

把 $A^{(i)}$ 分解为既約左理想的直和的方法虽然不是唯一的，但由定理 6′，在任何分解中必定是 d_i 个 d_i 級左理想的直和，这是明显的。

例 6 $e^{(i)}_{kk}\sim e^{(i)}_{k'k'}$，因此 $A^{(i)}_{k}\sim A^{(i)}_{k'}$。

［解］ 因为 $e^{(i)}_{kk}e^{(i)}_{kk'}e^{(i)}_{k'k'}=e^{(i)}_{kk'}\neq 0$，所以由命題 22，得 $e^{(i)}_{kk}\sim e^{(i)}_{k'k'}$。

例 7 假定 $i\neq i'$，那末 $e^{(i)}_{kk}\nsim e^{(i')}_{k'k'}$，因此 $A^{(i)}_{k}\nsim A^{(i')}_{k'}$。

［解］ 假定 $A(G)\ni f=\sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{d_i}\lambda_{\mu\nu}e^{(i)}_{\mu\nu}$，

那末
$$e_{kk'}^{(i)} f e_{k'k'}^{(i)} = \left(\sum_{\nu=1}^{d_i} \lambda_{k\nu} e_{k\nu}^{(i)} \right) e_{k'k'}^{(i)} = 0.$$
因此，由命題 22，$e_{kk}^{(i)} \not\sim e_{k'k'}^{(i)}$。

例 8 假定 $e^{(i)} = \sum_{k=1}^{d_i} e_{kk}^{(i)}$，那末 $e^{(1)}, \cdots, e^{(q)}$ 是 $A(G)$ 的直交冪等元，$e = e^{(1)} + \cdots + e^{(q)}$。又 $A^{(i)} \ni f \Leftrightarrow f = fe^{(i)} \Leftrightarrow f = e^{(i)} f \Leftrightarrow f = e^{(i)} f e^{(i)}$。因此 $A^{(i)} = A(G) e^{(i)} = e^{(i)} A(G) = e^{(i)} A(G) e^{(i)}$。

［解］ 后半段用 $e_{jk}^{(i)} e_{j'k'}^{(i')} = \delta_{ii'} \delta_{kj'} e_{jk'}^{(i)}$ 容易推得。

命題 25 $A^{(i)}$, $i = 1, \cdots, q$，是 $A(G)$ 的最小两側理想。$A(G)$ 中最小两側理想不外于这 q 个 $A^{(i)}$。

証明 在前半段，如果 $A^{(i)}$ 中异于 $\{0\}$ 的任意两側理想是 S 时，示明 $S \ni e_{jk}^{(i)} (j, k = 1, \cdots, d_i)$ 即可。

S 含非 0 的元 $f = \sum_{j,k=1}^{d_i} \lambda_{jk} e_{jk}^{(i)}$。今假定 $\lambda_{\mu\nu} \neq 0$。因为 S 是两側理想，所以 $S \ni \dfrac{1}{\lambda_{\mu\nu}} e_{1\mu}^{(i)} f e_{\nu 1}^{(i)} = \dfrac{1}{\lambda_{\mu\nu}} \lambda_{\mu\nu} e_{11}^{(i)} = e_{11}^{(i)}$。于是由命題 23，$e_{jj}^{(i)} \in S (j = 1, \cdots, d_i)$，因此，又 $S \ni e_{jj}^{(i)} e_{jk}^{(i)} = e_{jk}^{(i)} (j, k = 1, \cdots, d_i)$。

在証明后半段中，假定 $A(G)$ 的任意最小两側理想是 S，如果 $A(G)$ 中能够表为 $S \cdot A^{(i)}$ 的有限个元的和的元全体的集合用 $[S \cdot A^{(i)}]$ 表示，显然 $[S \cdot A^{(i)}]$ 又是 $A(G)$ 的两側理想。并且显然 $[S \cdot A^{(i)}] \subset A^{(i)}$，所以由 $A^{(i)}$ 的最小性，$[S \cdot A^{(i)}] = \{0\}$ 或 $A^{(i)}$。一方面，因为 $A(G)$ 含单位元 e，所以
$$\begin{aligned} S = S \cdot A(G) &= S(A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(q)}) \\ &= S \cdot A^{(1)} \oplus \cdots \oplus S \cdot A^{(q)} \subset [S \cdot A^{(1)}] + \cdots + [S \cdot A^{(q)}]. \end{aligned}$$
因此 $[S \cdot A^{(i)}]$, $i = 1, \cdots, q$，中至少有一个不是 $\{0\}$。对于这样的 i，$[S \cdot A^{(i)}] = A^{(i)}$。另一方面，显然 $[S \cdot A^{(i)}] \subset S$。所以 $A^{(i)} \subset S$，因为 $A^{(i)}$, S 都同是最小两側理想，所以 $A^{(i)} = S$。（証毕）

由命題 24 的系，例 8 及命題 25 得出下面的定理。

定理 29 在群代数 $A(G)$ 中有个数等于 G 的共軛类的个数 q 的最小两側理想 $A^{(i)} (i = 1, \cdots, q)$，它們相互直交，并且 $A(G)$

$=A^{(1)}+\cdots+A^{(q)}$. 各最小两側理想 $A^{(i)}$ 能够分解为 d_i 个相互等价的 d_i 級既約左理想的直和。

系 $A(G)$ 的任意两側意队 S 是 $A^{(i)}$, $i=1, 2, \cdots, q$ 中几个的直和。

証明 因为 $A^{(i)}$ 是最小两側理想,所以 $S\cap A^{(i)}=A^{(i)}$ 或 $=\{0\}$ 两者必居其一。今假定对于(假如有必要就改变順序) $i=1,2,\cdots,p$, $S\cap A^{(i)}=A^{(i)}$ (即 $S\supset A^{(i)}$), 对于 $j=p+1, \cdots, q$, $S\cap A^{(j)}=\{0\}$ 来証明 $S=A^{(1)}\oplus\cdots\oplus A^{(p)}$. 因为由定理, $A(G)=A^{(1)}\oplus\cdots\oplus A^{(q)}$, 所以 S 中任意元 x 能够分解为 $x=x_1+\cdots+x_q$, $x_i\in A^{(i)}$ 的形狀,这时只要証明 $x_j=0$, $j=p+1, \cdots, q$ 即可。用例 8 的記法, 把 $A^{(j)}$ 的冪等元写成 e_j, 那末 $x_j=xe_j$, 因为 S, $A^{(j)}$ 是两側理想, 所以 $xe_j\in S\cap A^{(j)}=\{0\}$. 因此 $x_j=xe_j=0$.

注意 假如把 $A(G)$ 考慮为 G 的左正則表現的表現空間,那末 $A(G)$ 的 d_i 級既約左理想不外于 G 的一个 d_i 級既約表現的表現空間。

§38 Young 的图形,台与盘

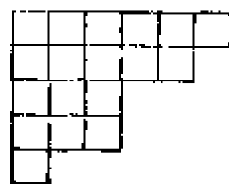
今后不再声明,假定 $G=\mathfrak{S}_n=\mathfrak{S}(\{1, 2, \cdots, n\})$. 象在 187 頁所述的那样, G 的共軛类的个数 q_n 等于不定方程

$$n=m_1+m_2+\cdots+m_r, \quad m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_r>0,\ 1\leqslant r\leqslant n \quad (38.1)$$

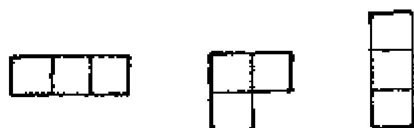
整数解的个数。并且对应于(38.1)的一个整数解的 G 的共軛类的代表能够取 G 的置換

$$(1, 2, \cdots, m_1)(m_1+1, \cdots, m_1+m_2)\cdots\cdot(m_1+\cdots+m_{r-1}+1, \cdots, m_1+\cdots+m_r).$$

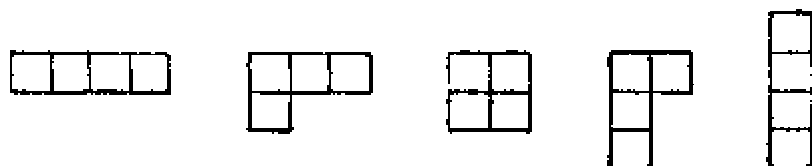
对于这共軛类(或自然数 n 的分割), 使象右图那样,持有第一行 m_1 个,第二行 m_2 个, $\cdots$, 第 r 行 m_r 个"格子"的"**n 次台**"对应。n 次台应該有 q_n 个。



例1　3次台有



3个，4次台有5个。



把数字1，2，…，n排列在一个n次台的各个格子中所得的每一个图形，叫做 **Young 图形**，我們又簡单地叫它做n次**盘**（以下暂时假定n固定，台和盘不再一一声明是"n次的"）。由一个台生成$n!$个盘。又台的"格子"有必要指示时，象图中那样用"坐标"(i, j)表示。

(1,1)	(1,2)	(1,3)	…
(2,1)	(2,2)	(2,3)	…
(3,1)	(3,2)	(3,3)	…
(4,1)	(4,2)	(4,3)	…
…	…	…	…

再由一个台D生成的$n!$个盘的集合用$\mathfrak{B}(D)$表示。对于$\mathfrak{B}(D)$中元B，假如施行G中元$x=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}$，那就得到$\mathfrak{B}(D)$中另一元$B'$，它用$xB=B'$表示。

所謂对于B"施行"x是下面的意义。例如，假定

$$B=\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array},\quad x=(1\ 2\ 3)，\text{那末}\ xB=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

一般，假定B，B'的(i, j)格子中数字分别用$B(i, j)$，$B'(i, j)$表示，

$$xB=B' \Leftrightarrow xB(i, j)=B'(i, j).$$

这时当然$(xy)B=x(yB)$，$eB=B$，$xB=B' \Leftrightarrow B=x^{-1}B'$。又假如取同一台上的两个盘$B$，$B'$，显然存在成为$B'=xB$这样的$x\in G$。

命题 26 $xB=B\Leftrightarrow x=e$.

証明 $xB=B$ 意味着对于所有的 n 个 (i,j), $xB(i,j)=B(i,j)$, 它意味着 $x=\begin{pmatrix}B(i,j)\\B(i,j)\end{pmatrix}=e$.

系 $xB=yB\Leftrightarrow x=y$.

对于一个盘 B, G 的元中把 B 的各行中元只在它的行中变动的叫做 B 的**水平置换**，把 B 的各列中元只在它的列中变动的，叫做 B 的**垂直置换**。水平置换的全体，垂直置换的全体显然分别成为 G 的子群。它分别用 $\mathfrak{H}(B)$, $\mathfrak{K}(B)$ 表示。显然 G 能够由 $\mathfrak{H}(B)$ 与 $\mathfrak{K}(B)$ 生成，$\mathfrak{H}(B)\cap\mathfrak{K}(B)=\{e\}$. $\mathfrak{H}(B)$ 的阶是 $m_1!\,m_2!\cdots m_r!$.

命题 27 假如 $G\ni x=hk=h'k'$，或 $x=kh=k'h'$, $h,h'\in\mathfrak{H}(B)$, $k,k'\in\mathfrak{K}(B)$，那末 $h=h'$, $k=k'$.

証明 假定 $x=hk=h'k'$, 那末 $h'^{-1}h=k'k^{-1}\in\mathfrak{H}(B)\cap\mathfrak{K}(B)$. 所以 $h'^{-1}h=k'k^{-1}=e$. 即 $h=h'$, $k=k'$. 当 $x=kh=k'h'$ 时也同样。 (証毕)

G 中各元 x 在 §29 中 f_x 的意义下能够看成为 $A(G)$ 中元。于是一个盘 B 給定时，由 B 得定义下面三个 $A(G)$ 中元

$$H_B=\sum_{h\in\mathfrak{H}(B)}h,\quad K_B=\sum_{k\in\mathfrak{K}(B)}(\mathrm{sgn}\,k)k,$$

$$c_B=H_BK_B=\sum_{\substack{h\in\mathfrak{H}(B)\\k\in\mathfrak{K}(B)}}(\mathrm{sgn}\,k)hk. \tag{38.2}$$

但 $\mathrm{sgn}\,k$ 是在 k 为偶置换时规定为 1, k 为奇置换时规定为 -1 的 $k\in\mathfrak{K}(B)$ 的函数。当 B 給定而不致发生誤解时，H_B, K_B, c_B 分别简单写成 H, K, c. 因为它們是 $A(G)$ 中元，所以是 G 中元 x 的(复数值)函数。例如 $c=c(x)$.

由命题 27, $x\in G$ 写成 $x=hk$ ($h\in\mathfrak{H}(B)$, $k\in\mathfrak{K}(B)$) 形状时，这种写法是唯一的。假如 x 能够写成这形状，由 (38.2), $c(x)=\mathrm{sgn}\,x$. 假如 x 不能写成这形状，$c(x)=0$, 即

$$c(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} k, & x=hk,\\ 0, & x\neq hk.\end{cases} \tag{38.3}$$

$c=c_B$ 叫做由 B 确定的 **Young 的对称子**(Young symmetrizer)。这是 Alfred Young 在 1901 年 Proc. London Math. Soc. 上的論文中引入的。象在后面所示，c 的某常数倍 $\frac{1}{\alpha}c$ (α 是自然数) 成为 $A(G)$ 的既約冪等元。又 $A(G)$ 的任意既約冪等元能够用 $\frac{1}{\alpha}c_B$ 的形状給出 (这事实 Young 已証明，但 Frobenius 在 1900 年的論文中早已証明同样事实)。

例 2 $n=3$, $B=\begin{array}{|cc}1&2\\3&\end{array}$ 时，$\mathfrak{H}(B)=\{1, (1, 2)\}$, $\mathfrak{K}(B)=\{1, (1, 3)\}$, $H=1+(1, 2)$, $K=1-(1, 3)$, $c=1+(1, 2)-(1, 3)-(1\,3\,2)$.

命題 28 $B'=xB$ 时，假如命 $\mathfrak{H}(B)=\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}(B')=\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{K}(B)=\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}(B')=\mathfrak{K}'$, $H_B=H$, $H_{B'}=H'$, $K_B=K$, $K_{B'}=K'$, $c_B=c$, $c_{B'}=c'$, 那末

(1) $x\mathfrak{H}x^{-1}=\mathfrak{H}'$, $x\mathfrak{K}x^{-1}=\mathfrak{K}'$,

(2) $xHx^{-1}=H'$, $xKx^{-1}=K'$, $xcx^{-1}=c'$.

証明 一般，对于 $x, y\in G$, 命 $xyx^{-1}=y'$, 那末 $xy=y'x$.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{x} & xB\\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y'}\\ yB & \xrightarrow[x]{} & y'B\end{array}$$

又假如 $h\in\mathfrak{H}$, 那末 $hB(i, j)=B(i, j')$. 因此 $xhB(i, j)=xB(i, j')$. 命 $xh=h'x$, 那末 $h'xB(i, j)=xB(i, j')$. 即 $h'\in\mathfrak{H}'$. 所以 $x\mathfrak{H}x^{-1}\subset\mathfrak{H}'$. 同样，$x^{-1}\mathfrak{H}'x\subset\mathfrak{H}$. 于是 $x\mathfrak{H}x^{-1}=\mathfrak{H}'$. 关于 $\mathfrak{K}$ 也是同样，因此得到(1). (2) 由它立即明白。

例 3 $B=\begin{array}{|cc}1&2\\3&\end{array}$, $B'=(1\,2\,3)B=\begin{array}{|cc}2&3\\1&\end{array}$ 时，$H=1+(1, 2)$, $K=1-(1,3)$,

$(1\,2\,3)H(1\,2\,3)^{-1}=(1\,2\,3)(1+(1, 2))(1\,3\,2)=1+(2, 3)=H'$.

$(1\,2\,3)K(1\,2\,3)^{-1}=(1\,2\,3)(1-(1, 3))(1\,3\,2)=1-(1, 2)=K'$.

命題 29 盘 hkB 能够由首先把 B 中数字水平移动作成 hB.

再把盘 hB 中数字垂直移动得出。

証明 由 $hk=hkh^{-1}h$，并且 $hkh^{-1}\in\mathfrak{K}(hB)$ 即得。

注意 因为 h 不一定是 $\mathfrak{H}(kB)$ 中元，所以 hkB 不能由先把 B 中数字垂直移动，再把所得的盘中数字水平移动得出。

命題 30 对于 $x\in G$ 能够写成 $x=hk$，$h\in\mathfrak{H}(B)$，$k\in\mathfrak{K}(B)$ 的必要充分条件是 B 中在同行的两个数字在 xB 中不是在同列。

証明 必要性。假如 $x=hk$，那末 xB 能够自把 B 中数字首先水平移动，再垂直移动得出。因此 B 中在同行的两个数字在 xB 中就在异列。

充分性。命 $B'=xB$，那末对于各对 (i,j) 成为 $B(i,j)=B'(l,p)$ 这样的 $l=l(i,j)$，$p=p(i,j)$ 唯一确定。假如 $j_1\neq j_2$，那末 $p(i,j_1)\neq p(i,j_2)$。因此 B 中各数字 $B(i,j)$ 能够移于格子 $(i,p(i,j))$，这置换是水平置换。如果命它为 h，因为在 hB 与 B' 中同数字必定在同列，由 $k'\in\mathfrak{K}(hB)$ 能够使 $k'(hB)=B'$。即 $x=k'h$。于是，如果命 $k=h^{-1}k'h$，那末由命题 28，$k\in\mathfrak{K}(h^{-1}h\,B)=\mathfrak{K}(B)$。因此 $x=k'h=hkh^{-1}h=hk$，$h\in\mathfrak{H}(B)$，$k\in\mathfrak{K}(B)$。 （証毕）

在两个盘 B，B' 中，把“B 中在同行的两个数字在 B' 中不在同列”这事实，今后为了簡单用 $B\succ B'$ 或 $B'\prec B$ 来表示。于是命題30 能够表为“$x=hk,h\in\mathfrak{H}(B),k\in\mathfrak{K}(B)\Leftrightarrow B\succ xB$”。$B\succ B'$的否定，即“取适当的两数字，它們在 B 中是在同行，在 B' 中又是在同列，”这事实用 $B\not\succ B'$ 或 $B'\not\prec B$ 表示。假如 $B=B'$，那末 $B\succ B'$。但 $B\succ B'$，而 $B\neq B'$，用 $B\gg B'$ 表示。

命題 31 假定 $xB=B'$，如果 $B\not\succ B'$，那就存在适当的对换 h,k，使 $hx=xk$，$h\in\mathfrak{H}(B)$，$k\in\mathfrak{K}(B)$ 成立。

証明 假定在盘 B 属于同行，在盘 B' 属于同列的两个数字是 μ，ν。命 $h=(\mu,\nu)$（把 μ 与 ν 互换的对换），显然 $h\in\mathfrak{H}(B)$，$h\in\mathfrak{K}(xB)$。又命 $k=x^{-1}hx$，那末 k 也是对换，$k\in\mathfrak{K}(x^{-1}xB)$

$=\mathfrak{K}(B)$, $hx=xk$.

系 当 $x\in G$ 不能写成 $x=hk$, $h\in\mathfrak{H}(B)$, $k\in\mathfrak{K}(B)$ 形状时，存在适当的对换 h', k' 使 $h'x=xk'$, $h'\in\mathfrak{H}(B)$, $k'\in\mathfrak{K}(B)$ 成立.

命题 32 (1) $hH=Hh=H$. (2) $kK=Kk=(\operatorname{sgn} k)K$. (3) 对于任意 $h\in\mathfrak{H}$, $k\in\mathfrak{K}$, $hck=(\operatorname{sgn} k)c$.

証明 (1) 因为 $\mathfrak{H}$ 是有限群，故 $h\mathfrak{H}=\mathfrak{H}h=\mathfrak{H}$. 由这显然成立。

(2) $kK=\sum_{k'\in\mathfrak{K}}(\operatorname{sgn} k')kk'=(\operatorname{sgn} k)\sum_{k\in\mathfrak{K}}(\operatorname{sgn} kk')kk'=(\operatorname{sgn} k)K$.

同样，$Kk=(\operatorname{sgn} k)K$.

(3) $hck=hHKk=(\operatorname{sgn} k)HK=(\operatorname{sgn} k)c$.

命题 33 对于任意 $h\in\mathfrak{H}(B)$, $k\in\mathfrak{K}(B)$, 假定 $f\in A(G)$ 满足 $hfk=(\operatorname{sgn} k)f$, 那就存在 $\lambda\in\boldsymbol{C}$, 使 $f=\lambda c$.

証明 对于任意 $x\in G$, 証明

$$f(x)=\begin{cases}\lambda(\operatorname{sgn} k), & x=hk\\ 0, & x\neq hk\end{cases}$$

即可。由假定，对于任意 $h\in\mathfrak{H}(B)$, $k\in\mathfrak{K}(B)$, $y\in G$,

$$(\operatorname{sgn} k)f(y)=(h^{-1}fk^{-1})(y)=f(hyk)\,[1].$$

---

[1] 由假定 $h\in\mathfrak{H}(B)$, $k\in\mathfrak{K}(B)$ 时下式恒成立：

$$hfk=(\operatorname{sgn} k)f,$$

此时有 $h^{-1}\in\mathfrak{H}(B)$ 及 $k^{-1}\in\mathfrak{K}(B)$, 因此下式也同样成立：

$$h^{-1}fk^{-1}=(\operatorname{sgn} k^{-1})f.$$

因为 $\operatorname{sgn} k=\operatorname{sgn} k^{-1}$, 所以

$$(\operatorname{sgn} k)f=h^{-1}fk^{-1}.$$

将 h^{-1}, k^{-1} 記为函数符号 $f_{h^{-1}}$ 及 $f_{k^{-1}}$, 则上式为

$$(\operatorname{sgn} k)f=(f_{h^{-1}}\cdot f\cdot f_{k^{-1}})(y).$$

根据 $A(G)$ 中元乘法定义，

$$(f_{h^{-1}}\cdot f\cdot f_{k^{-1}})(y)=\sum_{x\in G}f_{h^{-1}}(y\cdot x^{-1})(f\cdot f_{k^{-1}})(x)$$
$$=\sum_{x\in G}f_{h^{-1}}(yx^{-1})\sum_{z\in G}f(xz^{-1})\cdot f_{k^{-1}}(z).$$

上式右边只是当 $z=k^{-1}$, $yx^{-1}=h^{-1}$ 时不为 0, 其值等于 f 在 hyk 的值，所以

$$(f_{h^{-1}}\cdot f\cdot f_{k^{-1}})(y)=f(hyk),$$

因此 $(\operatorname{sgn} k)f(y)=f(hyk)$. ——譯者注

命 $f(e)=\lambda$，因为 $x=hk$，所以 $f(x)=\lambda(\operatorname{sgn} k)$。又假如 $x\neq hk$，由命题31的系，$h'x=xk'$，因为 $\operatorname{sgn} k'=-1$，所以 $f(x)=f(h'^{-1}xk')=(\operatorname{sgn}k')f(x)=-f(x)$，因此 $f(x)=0$。

命题 34 对于任意 $f\in A(G)$，存在 $\mu\in \boldsymbol{C}$，使 $cfc=\mu c$。

証明 对于任意 $h\in\mathfrak{H}(B)$，$k\in\mathfrak{K}(B)$ 有 $h(cfc)k=hHKfHKk=(\operatorname{sgn} k)HKfHK=(\operatorname{sgn} k)cfc$。因此由前命题，$cfc=\mu c$，$\mu\in \boldsymbol{C}$。

系 存在使 $c^2=\alpha c$ 的 $\alpha\in \boldsymbol{Z}$。

証明 假定 $\alpha\in \boldsymbol{C}$，由命题 34，上式成立是明显的[1]。因为 $c=\sum\limits_{x=hk}(\operatorname{sgn} k)\,x$，所以 c^2 中 x 的系数是 $\sum(\operatorname{sgn} k)(\operatorname{sgn} k')$ 形状的数 $\in \boldsymbol{Z}$。但 c 中 x 的系数是 ±1，所以存在满足 $c^2=\alpha c$ 的 $\alpha\in \boldsymbol{Z}$。

命题 35 $A(G)c$ 是 $A(G)$ 的左理想。假如它的級数是 d，那末 $\alpha d=n!$（$n!$ 是 G 的阶）。

証明 显然 $A(G)c$ 是 $A(G)$ 的左理想。

其次，假定由 $\tau(f)=fc$，$f\in A(G)$，定义 $\tau: A(G)\to A(G)c$，那末 $\tau\in\mathfrak{L}(A(G))$。今假定 $A(G)$ 的基底是 $\{a_1, \cdots, a_{n!}\}$，取[2] $a_i\in A(G)c$，$1\leqslant i\leqslant d$，如果由这基底把 τ 用矩陣表現，因为

$$\tau(fc)=fc^2=\alpha fc,$$

那就成为

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & & 0 & & \\ & \ddots & & & * \\ 0 & & \alpha & & \\ \hline & 0 & & & 0 \end{array}\right)}_{n!}\quad \begin{array}{l} \text{左上块 } d\times d \\ \text{全体 } n!\times n! \end{array}$$

形状。因此 τ 的迹 $S(\tau)=\alpha d$。

---

[1] 假定 $f=e$，由命題 34 显然存在 $\alpha\in \boldsymbol{C}$ 使 $c^2=\alpha c$ 成立。——譯者注

[2] 即是說在 $\{a_1, \cdots, a_{n!}\}$ 中，特别取 $a_i\in A(G)c$，$1\leqslant i\leqslant d$。——譯者注

一方取 G 中元作为 $A(G)$ 的基底，如果由这基底把 τ 用矩陣表現，那末它的对角綫上元素是 $xc\in A(G)$ 在 x 的值 $(xc)(x)$。因为

$$(xc)(x)=\sum_y x(xy^{-1})c(y)=c(e)=1,$$

它等于1，所以 $S(\tau)=n!$。因此

$$\alpha d=n!.$$

系　α 是自然数，是 $n!$ 的約数。

命題 36　假定 $\varepsilon=\dfrac{1}{\alpha}c=\dfrac{d}{n!}c$，那末 ε 是 $A(G)$ 的既約冪等元。

証明　$\varepsilon^2=\dfrac{1}{\alpha^2}c^2=\dfrac{\alpha}{\alpha^2}c=\dfrac{1}{\alpha}c=\varepsilon$.

又假如 $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_1^2=\varepsilon_1$，$\varepsilon_2^2=\varepsilon_2$，$\varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon_2\varepsilon_1=0$，那末 $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\varepsilon_1$。但由命題34，它等于 $\mu'\varepsilon(\mu'\in C)$。所以 $\varepsilon_1=\mu'\varepsilon$。于是 $\varepsilon_1^2=\mu'^2\varepsilon$。因为 $\varepsilon_1^2=\varepsilon_1$，所以 $\mu'=1$ 或 0。这意味着 $\varepsilon=\varepsilon_1$ 或 $\varepsilon=\varepsilon_2$。　　(証毕)

这样，由一个盘 B 就得到一个 $A(G)$ 的既約冪等元 ε，因而得到一个把 $A(G)\varepsilon$ 作为表現空間的 G 的既約表現。但是象在定理30叙述的那样，由属于相同台的盘所得到的既約表現相互等价，由属于相异台的盘所得到的既約表現是不等价。因为台的个数是与 G 的共軛类的个数 q 相同，所以上面那样 q 个相互不等价的既約表現已經是全部的了。这些結論順次証明于下。

命題 37　自属于同一台的两个盘 B, B' 象上面那样得到的既約冪等元是相互等价的。

証明　假定 B, B' 属于同一台，那末存在使 $B'=xB$ 的 $x\in G$。于是由命題28，$c'=xcx^{-1}$，因此 $\varepsilon'=x\varepsilon x^{-1}$，所以 ε 与 ε' 等价。

(証毕)

其次，为了考虑自相异台得到的冪等元，在台的集合 $\{D\}$ 中，給定下面那样的順序。假定确定 D, D' 的不变系分别是 $(m_1, m_2, \cdots,$

m_r), (m'_1, m'_2, $\cdots$, m'_r), 如果$m_1=m'_1$, $\cdots$, $m_\nu=m'_\nu$, $m_{\nu+1}>m'_{\nu+1}$, 那就规定 $D>D'$。假定 $D>D'$ 或 $D=D'$ 表为 $D\geqslant D'$, 那末由 $\geqslant$, $\{D\}$ 就成为全序集(154 页)。

命题 38 假定盘 B, B' 分别属于台 D, D', 如果 $D>D'$, 那末 $B\not\succ B'$。

証明 假定 $B\succ B'$ 并且 B 中第一行的 m_1 个数字都在 B' 的异列,那末 B' 的列数超过 m_1。因此 $m'_1\geqslant m_1$。一方,因为 $D>D'$, 所以 $m_1\geqslant m'_1$。于是 $m_1=m'_1$。因此对 B' 施行适当的垂直置换 k, 能够使得 B 中第一行的 m_1 个数字落在 kB' 中第一行。这时 B 中在同一行的数字都落在 kB' 中的异列。因为 $m_1=m'_1$, 再比較 B 与 kB' 的第二行,同样 $m_2=m'_2$。以下同样做得到 $m_i=m'_i$, $i=1, 2, \cdots, r$, 这与 $D>D'$ 相反。

命题 39 假定 $B\not\succ B'$, 那末 $HK'=K'H=0$, $\varepsilon'\varepsilon=0$。

証明 因为存在满足 $h=(\mu, \nu)\in\mathfrak{H}(B)\cap\mathfrak{K}(B')$ 的数字 μ, ν, 所以由命题 32, $HK'=HhK'=(\operatorname{sgn} h)HK'=-HK'$。因此 $HK'=0$。同样 $K'H=0$, 所以 $\varepsilon'\varepsilon=\frac{1}{\alpha\alpha'}H'K'HK=0$。

注意 $\varepsilon\varepsilon'=0$ 不一定成立。

命题 40 假定 $D>D'$, B, B' 是属于台 D, D' 的任意盘,如果 $\varepsilon=\varepsilon_B$, $\varepsilon'=\varepsilon_{B'}$, 那末对于任意的 $f\in A(G)$,

$$\varepsilon' f\varepsilon=0.$$

証明 对于任意 $x\in G$, $xB\in\mathfrak{B}(D)$, $B'\in\mathfrak{B}(D')$, 因为 $D>D'$, 由命题 38, 39, $\varepsilon'\varepsilon_{xB}=0$。但 $\varepsilon_{xB}=x\varepsilon x^{-1}$。所以 $\varepsilon' x\varepsilon x^{-1}=0$。再把 x 右乘得 $\varepsilon' x\varepsilon=0$。它对于所有的 $x\in G$ 成立。因此

$$\varepsilon' f\varepsilon=\sum_{x\in G}f(x)\varepsilon' x\varepsilon=0. \qquad \text{(証毕)}$$

由这命题及命题 22 得知,自 B, B' 得到的既約表現不等价。

总結以上,利用 Young 的图形得到下面解决全部求 $G=\mathfrak{S}_n$

的既約表現問題的定理。

定理 30　假定 G 是 n 阶对称群，B,B' 是 n 次盘。

(1) 假如 B 的 Young 的对称子是 c，那末 $A(G)c$ 成为 G 的既約表現的表現空間。

(2) 自盘 B，盘 B' 得到的 G 的既約表現是等价的必要充分条件是 B 与 B' 屬于同台。

(3) G 的任意既約表現是与自某盘 B 象 (1) 那样得到的既約表現等价。

例 4

自台 $D^{(1)}=$ [一行方格 □□…□□]，台 $D^{(2)}=$ [一列方格] 得到的既約表現分别是恒等表現，交代表現。

[解]　假定取属于 $D^{(1)}$ 的任意盘 B_1，那末 $\mathfrak{H}(B_1)=G$，$\mathfrak{R}(B_1)=\{e\}$。因此 $c_1=c_{B_1}=\sum_{x\in G}x$。于是对于任意 $x\in G$ 有 $xc_1=c_1x=c_1$。所以 $x\varepsilon_1=\varepsilon_1x=\varepsilon_1$。因此又对于任意 $f\in A(G)$ 有 $f\varepsilon_1=\varepsilon_1f$。所以 $A(G)\varepsilon_1$ 中任意元能够表为 $f\varepsilon_1=f\varepsilon_1\cdot\varepsilon_1=\varepsilon_1f\varepsilon_1=\mu\varepsilon_1\,(\mu\in C)$（由命題 34）。因此假如自这台得到的既約表現是 ρ_1，因为对于任意 $a\in G$，任意 $\mu\varepsilon_1\in A(G)\varepsilon_1$ 有 $\rho_1(a)(\mu\varepsilon_1)=\mu a\varepsilon_1=\mu\varepsilon_1$，所以 ρ_1 是恒等表現。

其次，对于属于 $D^{(2)}$ 的盘 B_2，$\mathfrak{H}(B_2)=\{e\}$，$\mathfrak{R}(B_2)=G$。于是 $c_2=c_{B_2}=\sum_{x\in G}(\operatorname{sgn}x)x$。因此与上同样，对于任意 $x\in G$ 有 $x\varepsilon_2=\varepsilon_2x=(\operatorname{sgn}x)\varepsilon_2$，于是任意 $f\varepsilon_2\in A(G)\varepsilon_2$ 能够表为 $\mu'\varepsilon_2\,(\mu'\in C)$。所以假如自 $D^{(2)}$ 得到的既約表現是 ρ_2，因为对于任意 $a\in G$，任意 $\mu'\varepsilon_2\in A(G)\varepsilon_2$，

$$\rho_2(a)(\mu'\varepsilon_2)=\mu'a\varepsilon_2=(\operatorname{sgn}a)\mu'\varepsilon_2,$$

所以 ρ_2 是交代表現。

例 5　$\mathfrak{S}_3$ 的既約表現。

[解]　3次的台是例1的三个。其中自第一及第三台分别得到恒等表現，交代表現。为了求自第二台得到的既約表現，取例2的盘（左图），这里

1	2
3	

$$c=1+(1,2)-(1,3)-(1\,3\,2),$$

由計算，$c^2=3c$. 所以这表現 ρ 是 $\frac{3!}{3}=2$ 次的表現。因为作为 $A(G)c$ 的基底，可以取綫性无关的任意两元，乃取 c 与

$$f=(1\,3)c=-1+(1,3)-(2,3)+(1\,2\,3).$$

由这基底，ρ 能够用下面的矩陣表現。

$$e\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad (1,2)\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix},\quad (1,3)\leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$(2,3)\leftrightarrow\begin{pmatrix}-1,&0\\-1,&1\end{pmatrix},\quad (1\,2\,3)\leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix},\quad (1\,3\,2)\leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

注意　这表現 ρ 的确是与在 177 頁中給出的表現 ρ_2 等价。这事实能够直接予以証明，即把 ρ_2 用矩陣

$$\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{3}}\\-1&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

变换就可以得到上面的 ρ。

§ 39 标 准 盘

由前节定理 30，求 $G=\mathfrak{S}_n$ 的既約表現，首先作記載 n 个数字的台 $D_1,\cdots,D_q$，任取属于各个台的盘 B_i，$i=1,\cdots,q$，作各 B_i 的 Young 的对称子 c_{B_i}，$i=1,\cdots,q$. 这样，因为 $A(G)c_{B_i}$ 是既約表現的表現空間，所以由計算也能够作出既約表現的矩陣。于是求对称群的既約表現的問題在理論上是解决了的，但我們希望把自 c_{B_i} 得到的表現稍为具体的写出。另外这表現的級数 d_i 由 D_i 的形状立即知道。在下面两节介紹 Young 对于这問題的方法。

Young 为了这，对于各个台象下面那样定义**标准盘**(standard tableau)，它是满足条件

$$\begin{cases}i<i'\Rightarrow B(i,k)<B(i',k),\\ k<k'\Rightarrow B(i,k)<B(i,k')\end{cases}$$

的盘。

例 1　$n=3$ 时，对于台 $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ 有 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ 两个标准盘。$n=5$ 时，对于台 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$ 的标准盘有下面五个：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

对于各个台 D_i 能有几个标准盘？但是对于 D_i 所能作的标准盘的总数象在下节所示，是等于自 $c_B(B\in\mathfrak{B}(D_i))$ 所得到的既約表現的級数 d_i。

以下假定对应于 n 的分割

$$n=m_1+m_2+\cdots+m_r,\ m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_r>0$$

的台用 $D(m_1,\ \cdots,\ m_r)$ 表示。$D(m_1,\ \cdots,\ m_r)$ 持有 r 行，在第 i 行附着 m_i 个数字。对于台 $D(m_1,\ \cdots,\ m_r)$ 形成的标准盘的总数用 $d(m_1,\ \cdots,\ m_r)$ 表示。关于这有下面的命题。

命題 41

$$\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_r=n\\ m_1\geqslant\cdots\geqslant m_r>0\\ r=1,2,\cdots,n}}(d(m_1,\ \cdots,\ m_r))^2=n!。\tag{39.1}$$

为証此，需要几个引理。首先引入下面的記法。

把 $n=\sum\limits_{i=1}^{r}m_i$ 次台 $D(m_1,\ \cdots,\ m_r)$ 暂时固定，它用 D 表示，又把 $d(m_1,\ \cdots,\ m_r)$ 略記为 d。假定 $m_{s-1}>m_s$，那末在 D 的第 s 行的右端又添加一个格子就得到 $(n+1)$ 次台 $D(m_1,\ \cdots,\ m_{s-1},\ m_s+1,\ m_{s+1},\ \cdots,\ m_r)$。这台用 $D^{(s)}$ 表示，$D^{(s)}$ 上标准盘的个数用 $d^{(s)}$ 表示。假如 $m_{s-1}=m_s$，那末 $D^{(s)}$ 不存在。这时命 $d^{(s)}=0$。又假定 $D^{(r+1)}=D(m_1,\ \cdots,\ m_r,\ 1)$，它上标准盘的个数作为 $d^{(r+1)}$。又在同一个 D，假如 $m_t>m_{t+1}$，那末除去 D 的第 t 行右端一个格子就得到 $(n-1)$ 次台 $D(m_1,\ \cdots,\ m_{t-1},\ m_t-1,\ m_{t+1},\ \cdots,\ m_r)$，这台用 $D_{(t)}$ 表示。$D_{(t)}$ 上标准盘的个数假定是 $d_{(t)}$。假如 $m_t=m_{t+1}$，那

末 $D_{(t)}$ 不存在。这时命 $d_{(t)}=0$. 再又假如 $m_r>1$, 那末 $D_{(r)}=D(m_1, \cdots, m_{r-1}, m_r-1)$, 假如 $m_r=1$, 那末 $D_{(r)}=(m_1, \cdots, m_{r-1})$. 当 $m_{p-1}>m_p>m_{p+1}$ 时,显然 $(d_{(p)})^{(p)}=(d^{(p)})_{(p)}=d$. 特别, $(d_{(r)})^{(r)}=(d^{(r-1)})_{(r+1)}=d$. 一般,假定 $d^{(s)}\neq0$, $d_{(t)}\neq0$, 那末 $(d^{(s)})_{(t)}=(d_{(t)})^{(s)}$, 因此把它单写成 $d_{(t)}^{(s)}$. 当 $d^{(s)}=0$ 或 $d_{(t)}=0$ 时, $d_{(t)}^{(s)}=0$.

引理 1 在台 $D=D(m_1, \cdots, m_r)$ 上任意标准盘 B 中, 数字 n 必在某行的右端,如果 n 所在的行是第 t 行,那末 $m_t>m_{t+1}$.

証明 由标准盘的定义显然。

引理 2 n 在第 t 行的标准盘的个数等于 $d_{(t)}$.

証明 n 在第 t 行的标准盘存在时, 由引理 1, n 在第 t 行的右端,而 $m_t>m_{t+1}$. 于是假如把这标准盘中数字 n 所在的格子除去就得到 D_t 上的标准盘。反之,对于 D_t 上一个标准盘,在第 t 行的右端添加一个格子,如果在这里記为 n, 就得到 n 在第 t 行的 D 的标准盘。于是这时引理 2 成立。在这以外的情况, 即 $m_t=m_{t+1}$ 时, n 在第 t 行的标准盘不存在, 由定义, $d_{(t)}=0$. 所以这时引理 2 也成立。

引理 3

$$d=\sum_{t=1}^{r} d_{(t)}. \tag{39.2}$$

証明 由引理 2 显然成立。

例 2 用引理 3, 能够計算对于任意台的标准盘的个数。例如如果就例 1 中两个台来計算,

$$d(2, 1)=d(1, 1)+d(2)=d(1)+d(1)=1+1=2,$$

$$\begin{aligned} d(3, 2)&=d(2, 2)+d(3, 1)=2d(2, 1)+d(3) \\ &=2d(2, 1)+d(1)=2\times2+1=5. \end{aligned}$$

引理 4

$$(n+1)d=\sum_{s=1}^{r+1} d^{(s)}. \tag{39.3}$$

証明　假定 $n=1$，那末

$$D=\square,\quad D^{(1)}=\square\square,\quad D^{(2)}=\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}.$$

因此 $d=d^{(1)}=d^{(2)}=1$，所以(39.3)成立。于是由归納法，假定关于 $(n-1)$ 次台(39.3)成立，来証明关于 n 次台的(39.3)。

由归納法的假定，

$$nd_{(t)}=\sum_{s=1}^{r+1}d_{(t)}^{(s)} \tag{1}$$

关于 $t=1,\cdots,r$ 成立。又关于 $D^{(s)}$，$s=1,\cdots,r$，如果用引理3，那末

$$d^{(s)}=\sum_{t=1}^{r}d_{(t)}^{(s)}. \tag{2}$$

因为关于 $D^{(r+1)}$ 行数是 $r+1$，所以

$$d^{(r+1)}=\sum_{t=1}^{r}d_{(t)}^{(r+1)}+(d^{(r+1)})_{(r+1)}=\sum_{t=1}^{r}d_{(t)}^{(r+1)}+d. \tag{3}$$

用(1)，(2)，(3)計算(39.3)的右边得

$$\sum_{s=1}^{r+1}d^{(s)}=\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{r}d_{(t)}^{(s)}+\sum_{t=1}^{r}d_{(t)}^{(r+1)}+d=\sum_{t=1}^{r}\sum_{s=1}^{r+1}d_{(t)}^{(s)}+d$$

$$=n\sum_{t=1}^{r}d_{(t)}+d=(n+1)d.$$

命題41的証明　关于 n 用归納法来証明。因为 $n=1$ 时是显然的，所以关于 n 假定命題成立来証明关于 $n+1$ 即可。

对于 n 次台附加一列番号，假定为 $D_1,\cdots,D_q$，D_i 上标准盘的个数作为 d_i，于是(39.1)能够用

$$\sum_{i=1}^{q}d_i^2=n! \tag{4}$$

表示。假定 $(n+1)$ 次台是 $\bar{D}_1,\cdots,\bar{D}_{\bar{q}}$，$\bar{D}_j$ 上标准盘的个数是 $\bar{d}_j$，今假定(4)成立，証明

$$\sum_{j=1}^{\bar{q}}\bar{d}_j^2=(n+1)! \tag{5}$$

即可。在 D_i 中一行的右端添加一个格子成为 $\bar{D}_j$ 时，D_i，$\bar{D}_j$ 相差只有一个格子。假定用記号 $i\sim j$ 表示。于是作 $i\sim j$ 这样的 i，j 組 (i, j) 的全体的积 $d_i\bar{d}_j$，假如它們的和是 s，

$$s=\sum_{i\sim j}d_i\bar{d}_j,$$

这 s 的意义能够从两方面来考虑。首先，假如把 i 固定，作关于 $i\sim j$ 这样 j 的 $d_i\bar{d}_j$ 的和 s_i，于是

$$s=s_1+\cdots+s_q. \tag{6}$$

再假定先把 j 固定，作关于 $i\sim j$ 这样 i 的 $d_i\bar{d}_j$ 的和 $\bar{s}_j$，于是

$$s=\bar{s}_1+\cdots+\bar{s}_{\bar{q}}. \tag{7}$$

如果象(6)那样考虑，用(39.3)，因为

$$s_i=d_i\sum_{i\sim j}\bar{d}_j=(n+1)d_i^2,$$

所以由(4)，$s=(n+1)!=$(5) 的右边。如果象(7)那样来考虑，用(39.2)，

$$\bar{s}_j=\bar{d}_j\sum_{i\sim j}d_i=\bar{d}_j^2,$$

所以 $s=$(5) 的左边。因此(5)得証。

§40 标准盘的个数与对称群的既約表現的級数

在本节証明下面的定理。

定理 31 在 n 阶对称群 $\mathfrak{S}_n$ 中，自对应于台 D 上任意盘 B 的 Young 的对称子 e_B 所得到的表現 ρ_B 的級数等于 D 上标准盘的个数 d_D。

在前节已示明

$$\sum_D d_D^2=n!. \tag{40.1}$$

引用这事实，上定理 31 的証明归結于下面的命題。

命題 42 假定自台 D 上盘 B_1, $\cdots$, $B_{n!}$ 所得到的 Young 的对称子是 e_1, $\cdots$, $e_{n!}$，那末 $A_D=A(G)e_1+\cdots+A(G)e_{n!}$ 是 $A(G)$ 的

最小两側理想。特别，假如 $B_1, \cdots, B_d$ 是标准盘，那末

$$A(G)c_1+\cdots+A(G)c_d=A(G)c_1\oplus\cdots\oplus A(G)c_d.$$

实际上，这命题假如已証明，由定理 29，A_D 与任一个 $A^{(i)}$ 一致，因此成为 d_i 个 d_i 級既約左理想的直和。这 d_i 不外是 ρ_B 的級数。一方面因为 $A(G)c_1\oplus\cdots\oplus A(G)c_d\subset A_D$ 是 d 个既約左理想的直和，所以由定理 6′，$d_D\leqq d_i$。这对各台(因面各 i)都成立。在 q 个 d_i 之間，由定理 17 系 1 有关系

$$\sum_{i=1}^{q} d_i^2=n!.$$

由这及(40.1)，不得不 $d_D=d_i$。

于是又更得下系。

系　$A_D, c_1, \cdots, c_d$ 假定如命題 42，那末

$$A_D=A(G)c_1\oplus\cdots\oplus A(G)c_d.$$

为了証明这命題，把 D 上标准盘排成辞书式的順序，假定为 $B_1<B_2<\cdots<B_d$。

所謂辞书式是下面的意义。假定 B, B' 是 D 上两个盘，比較依順序排列了的 n 个数字的列

$$B(1,1), B(1,2), \cdots, B(1,m_1), B(2,1), \cdots, B(r,m_r),$$
$$B'(1,1), B'(1,2), \cdots, B'(1,m_1), B'(2,1), \cdots, B'(r,m_r).$$

假如 $B\neq B'$，那末在其中有 $B(i,k)\neq B'(i,k)$ 的 (i,k) 出現。依上順序看时对于最初出現相异的数字 $B(i,k)$，$B'(i,k)$，如果 $B(i,k)<B'(i,k)$，那末 $B<B'$。

例　在台 $D=D(3,2)$ 上的标准盘

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&\\\cline{1-2}\end{array} < \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5&\\\cline{1-2}\end{array} < \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4&\\\cline{1-2}\end{array}$$

$$< \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5&\\\cline{1-2}\end{array} < \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4&\\\cline{1-2}\end{array}$$

这时下面的引理成立。

引理 假定在 D 上两个标准盘 B, B', $B \gg B'$, 那末 $B > B'$.

証明 假定 $B < B'$, 示明 $B \not\gg B'$ 即可。对于 (i, k) 排成上面那样順序,取滿足 $B(i, k) < B'(i, k)$ 的最初 (i, k). 在这格子"上左"的格子中(图中粗范圍中的格子), B 与 B' 的数字相同。这里 $i \neq 1$, 即 (i, k) 不能在左端。在标准盘,左端数字是由在它前的数字确定。又 $B(i, k)$ 在 B' 中不能在 (i, k) 右下(图中点綫的范圍)。因为 $B'(i, k)$ 已經是比 $B(i, k)$

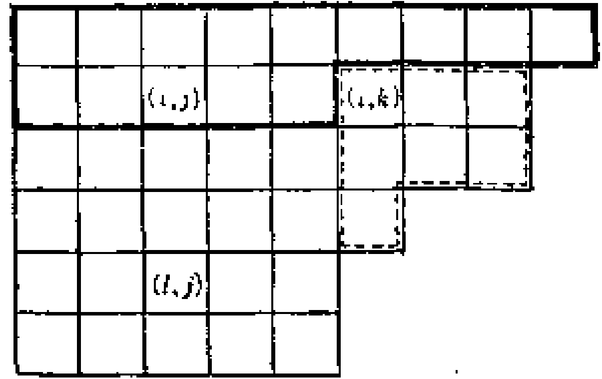


图 40.1

大,所以如果 $B(i, k) = B'(l, j)$, 那末 $i < l$, $j < k$. 这时 (i, j) 的格子因为在 (i, k) 的"上左",所以 $B(i, j) = B'(i, j)$. 于是 $B(i, j)$, $B(i, k)$ 这两数字在 B 中是在同行, 在 B' 中 $B'(i, j)$, $B'(l, j)$ 則在同列。

系 假如 $B < B'$, 那末 $c_{B'}c_B = 0$.

証明 由上面引理及命題 39 即得。

命題 42 的証明 A_D 显然是 $A(G)$ 的左理想, 更来証明又是右理想。于是假定 $a \in G$, 把 a 看成 $A(G)$ 的基底中元 f_a 而来証明 $A_D a = A_D$ 即可。由命題 28, 因为有成为 $a^{-1}c_i a = c_{\nu_i}$ 即 $c_i a = a c_{\nu_i}$ 这样 $\{1, 2, \cdots, n!\}$ 的排列 $\{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n!}\}$, 所以

$$(x_1 c_1 + \cdots + x_{n!} c_{n!}) a = x_1 a c_{\nu_1} + \cdots + x_{n!} a c_{\nu_{n!}} \in A_D.$$

因此 A_D 是两側理想。

假定 A_D 是含 c_1 的两側理想, A_0 含 c_1 的最小两側理想, 因为 $c_1, \cdots, c_{n!}$ 是相互等价的冪等元的数量倍, 所以由命題 23, $c_2, \cdots, c_{n!} \in A_0$, 因此 $A_0 \supset A_D$, 于是 $A_0 = A_D$. 所以 A_D 是 $A(G)$ 的最小两側理想。

在証明后半部，示明 $x_1c_1+\cdots+x_dc_d=0(x_i\in A(G))\Rightarrow x_1c_1=\cdots=x_dc_d=0$ 即可。今假定标准盘 $B_1,\cdots,B_d$ 取排成 $B_1<\cdots<B_d$ 順序的番号，如果 $x_1c_1+\cdots+x_dc_d=0$，那末自右乘 c_1 得 $x_1c_1^2=0$，所以 $x_1c_1=0$。因此 $x_2c_2+\cdots+x_dc_d=0$。假如自右乘 c_2 就得到 $x_2c_2=0$。以下同样即得 $x_1c_1=x_2c_2=\cdots=x_dc_d=0$。

注意　对于台 D 上标准盘的个数 d_D（即对应于 D 上盘 B 的既約表現 ρ_B 的級数）下面的明晰 (explicit) 公式是大家熟知的[1]：

$$d_D=n!\frac{\prod\limits_{i<j}(l_i-l_j)}{l_1!l_2!\cdots l_r!}.$$

但 $D=D(m_1,m_2,\cdots,m_r)$，$l_i=m_i+r-i$。

当 n 不太大时，实际計算 d_D 用前节例2所用的前节引理3的方法比用这公式还要便利。

最后，把 ρ_B 的特征标明显 (explicit) 給出的 (Schur) 公式和計算这特征标相当于前节引理3的 (Murnaghan) 方法也是大家熟知的，关于这方面的介紹于此皆从略。

§41　对称群的既約表現的矩陣

这节根据 Young 叙述实际計算对称群既約表現矩陣的方法。

与前节同样，假定把 D 上标准盘辞书式地排列为 $B_1<B_2<\cdots<B_d$，c_i 是 B_i 的对称子（以下 D 认为是一定的，"D 上"这語不再一一声明）。又关于两个盘 B, B'，§38 中的記法 $\mathfrak{H}_B$, $\mathfrak{H}_{B'}$ 分别写成 $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$，它們的元分别写成 h, h'，把 H_B, $H_{B'}$ 分别写成 H, H'，关于 $\mathfrak{K}$, K, k 也用同样的記法（B_i, B_j 代替 B, B' 时，与它对应的写成 H_i, H_j, K_i, K_j 等）。再关于两个番号 $i, j(1\leqslant i, j\leqslant d)$，把 $B_i\succ B_j$ 写成 $i\succ j$，把 $B_i\gg B_j$ 写成 $i\gg j$。由前节引理，假如 $i\succ j$，那末 $i\gg j$。假如 $i\gg j$，那末 $i>j$。又由命題 39，假如 $i\not\succ j$，那末

[1] 参看 F.D. Murnaghan: The Theory of Groups Representations (1938) p. 114～119. ——譯者注

$$H_iK_j=K_jH_i=0,\quad c_jc_i=0.$$

命題 43 假定关于两个盘 B, B' 有 $B\succ B'$, 那末 $\mathfrak{H}$ 中存在满足 $K'h=hK$ 的元 h.

証明 因为 $B\succ B'$, 所以由命題 30, 由 $xB=B'$ 确定的 $x\in G$ 能够写成 $x=hk$, $h\in\mathfrak{H}$, $k\in\mathfrak{K}$ 的形状。由命題 28,

$$K'=xKx^{-1}=hkKk^{-1}h^{-1}=hKh^{-1}.$$

所以 $$K'h=hK.$$ (証毕)

以下考虑有順序的标准盘 $B_1<\cdots<B_d$. 对于 $i\in\{1, 2, \cdots, d\}=J$, 假如取成为 $i\ll j$ 的 $j\in J$, 当然 $i<j$. 并且由命題 43, 存在 $K_ih_j=h_jK_j$ 这样的 $h_j\in\mathfrak{H}_j$. 这 h_j 用 h_{ij} 表示。在命題 43 的証明中,給出求 h_{ij} 的方法。即取满足 $a_{ij}B_j=B_i$ 这样的 $a_{ij}\in G$,由 $a_{ij}=h_{ij}k_{ij}$, $h_{ij}\in\mathfrak{H}_j$, $k_{ij}\in\mathfrak{K}_j$ 給出。 由命題 27, h_{ij} 由 i 与 $j(i\ll j)$ 唯一地給出。当 $i=j$ 或 $i\not\ll j$ 时, $h_{ij}=0(\in A(G))$. 用这 h_{ij} 由

$$\begin{aligned}
&u_d=e,\\
&u_{d-1}=e-h_{d-1,d},\\
&u_{d-2}=e-h_{d-2,d-1}u_{d-1}-h_{d-2,d},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&u_1=e-h_{1,2}u_2-h_{1,3}u_3-\cdots-h_{1,d-1}u_{d-1}-h_{1,d}
\end{aligned}$$

(e 是 G 的单位元)順次定义 u_d, u_{d-1}, $\cdots$, $u_1\in A(G)$, 命

$$K_i'=K_iu_i\quad(i=1, \cdots, d).$$

关于这 K_i', 下面的命題成立。

命題 44 (1) $K_i'=K_i-\sum_{j=1}^{d}h_{ij}K_j'$.

(2) 假如 $i\neq j$, 那末 $K_i'H_j=0$, $i, j=1, \cdots, d$.

(3) $K_i'H_i=K_iH_i$.

証明 (1) 由 K_i', h_{ij} 的定义自明。

(2), (3) 用关于 i 自上而下的归納法来証明。假定 $i=d$, 那末 $K_i'=K_i$. 所以 (3) 显然成立。又因为 $B_i<B_d$, 由命題 39, (2)

也是显然的。于是对于 $i<p\leqslant d$ 的所有自然数 p, 假定

$$\begin{cases} K'_pH_j=0, \ j=1, \cdots, d, \ j\neq p, \\ K'_pH_p=K_pH_p \end{cases}$$

成立,来証明 (2), (3)。

由(1)，
$$K'_iH_j=K_iH_j-\sum_{p=1}^{d}h_{ip}K'_pH_j.$$

这里把关于 j 的情况分为下面三种:

(i) 假如 $i\not\ll j$, 由命题 39, $K_iH_j=0$. 对于 $p=i$ 或 $p\not\gg i$ 的 p 由定义, $h_{ip}=0$. 对于 $p\gg i$ 的 p, 因为 $i<p\leqslant d$, $p\neq j$, 所以由归納法的假定, $K'_pH_j=0$. 因此 $K'_iH_j=0$.

(ii) 假如 $i\ll j$, 那末对于 $p\gg i$, $p\neq j$ 的 p 与上同样, $K'_iH_j=0$. 对于 $p=i$ 或 $p\not\gg i$ 的 p, 因为 $h_{ip}=0$, 所以

$$K'_iH_j=K_iH_j-h_{ij}K'_jH_j.$$

于是用归納法假定的第二式,得

$$\begin{aligned} K'_iH_j&=K_iH_j-h_{ij}K_jH_j=K_iH_j-K_ih_{ij}H_j \\ &=K_iH_j-K_iH_j=0. \end{aligned}$$

由 (i) 与 (ii), 得証 (2)。

(iii) $i=j$ 时, 用(2), $K'_iH_i=K_iH_i-h_{ii}K'_iH_i=K_iH_i$. 因此 (3)得証。

命题 45 假定 $c'_j=H_jK'_j=c_ju_j$,与命題 34 系,命題 35 同样,命 $\alpha=\dfrac{n!}{d}$, 那末 $c'_jc_j=\alpha c_j\neq0$, $c'_jc'_j=\alpha c'_j$. 又如果 $i\neq j$, 那末 $c'_ic'_j=0$.

証明 $c'_jc_j=H_jK'_jH_jK_j$. 由前命题(3), 因为$K'_jH_j=K_jH_j$, 所以 $c'_jc_j=c_jc_j=\alpha c_j\neq0$, $c'_jc'_j=c'_jc_ju_j=\alpha c_ju_j=\alpha c'_j$. 又

$$c'_ic'_j=H_iK'_iH_jK'_j=0 \quad (i\neq j).$$

系 $\dfrac{1}{\alpha}c'_j$ 是 $A(G)$ 中与 $\dfrac{1}{\alpha}c_j$ 等价的既約冪等元。

命題 46 假定象 253 頁那样, G 中把 B_j 移动到 B_i 的元是

$a_{ij}(a_{ij}B_j=B_i)$，如果命 $\frac{1}{\alpha}a_{ij}c'_j=e_{ij}$，那末 $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$。

証明 由命題 28，$a_{ij}H_j=H_ia_{ij}$，$a_{ij}K_j=K_ia_{ij}$，所以

$$e_{ij}e_{kl}=\frac{1}{\alpha^2}a_{ij}H_jK'_ja_{kl}H_lK'_l=\frac{1}{\alpha^2}a_{ij}H_jK'_jH_ka_{kl}K'_l.$$

但由命題 44(2)，如果 $j\neq k$，那末 $K'_jH_k=0$。因此，假如 $j\neq k$，那末 $e_{ij}e_{kl}=0$。又假如 $j=k$，那末 $K'_jH_k=K'_jH_j=K_jH_j$。因此用 $a_{ij}a_{jl}=a_{il}$ 能够象下面这样来証明，

$$e_{ij}e_{jl}=\frac{1}{\alpha^2}a_{ij}H_jK_jH_ja_{jl}K'_l=\frac{1}{\alpha^2}a_{ij}a_{jl}H_lK_lH_lK'_l$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}a_{il}H_lK'_lH_lK'_l=\frac{1}{\alpha^2}a_{il}c'_lc'_l$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}a_{il}\alpha c'_l=\frac{1}{\alpha}a_{il}c'_l=e_{il}.$$

命題 47 e_{11}，e_{12}，…，e_{dd} 是含 c_i 或 c'_i 的 $A(G)$ 中最小两側理想 $A(G)c_1+\cdots+A(G)c_d=A_D$ 的基底，$\sum_{i=1}^{d}e_{ii}=e_D$ 是 A_D 的单位元。

証明 因为 $e_{ij}=\frac{1}{\alpha}a_{ij}c'_j\in A(G)c'_j=A(G)c_ju_j\subset A_D$，所以 e_{ij} 含于所有的 A_D。$\dim A_D=d^2$，但 d^2 个元 e_{11}，e_{12}，…，e_{dd} 的綫性无关性可如下証明。实际上，假如 $\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_{ij}e_{ij}=0$，$\alpha_{ij}\in \boldsymbol{C}$，于两边左乘 e_{ii}，右乘 e_{jj} 得 $\alpha_{ij}e_{ij}=0$。因为 $e_{ij}e_{ji}=e_{ii}=\frac{1}{\alpha}c'_i\neq 0$，所以 $e_{ij}\neq 0$。于是 $\alpha_{ij}=0$。因此 e_{ij} 是 A_D 的基底，A_D 中任意元能够唯一地表为 $\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_{ij}e_{ij}$ 的形状。假如对于这元使 $\mathfrak{M}(d, \boldsymbol{C})$ 中元 (α_{ij}) 对应的映射是 φ，那末由前命題立即得知这样的 φ 是自 A_D 到 $\mathfrak{M}(d, \boldsymbol{C})$ 作为代数的同构映射。显然因为 $\varphi(e_D)=E_d$，所以 e_D 是 A_D 的单位元。 (証毕)

用上命題中的同构映射 φ，能够象下面那样作成 G 的 d 級矩陣表現。即如果把 $a\in G$ 看成为 $A(G)$ 中元，那末 $ae_D\in A_D$，因为

$\varphi(ae_D)\in\mathfrak{M}(d, \boldsymbol{C})$, $\varphi(abe_D)=\varphi(ae_D be_D)=\varphi(ae_D)\varphi(be_D)$, 所以 $a\to\varphi(ae_D)$給出 G 的表現。假定 $\varphi(ae_D)=(\alpha_{ij})$,与§37例4同样，把只是第 i 行第 j 列是1，其他元都是0的矩陣用 E_{ij} 表示，因为 $\varphi(e_{ij})=E_{ij}$, $E_{ii}\cdot(\alpha_{ij})\cdot E_{jj}=\alpha_{ij}E_{ij}$, 所以

$$e_{ii}ae_{jj}=\alpha_{ij}e_{ij}. \tag{41.1}$$

如果把 e_{ij} 的定义 $e_{ij}=\dfrac{1}{\alpha}a_{ij}c'_j$ 代入(41.1)，那末(用 $a_{ii}=e$)

$$\frac{1}{\alpha}c'_i ac'_j=\alpha_{ij}a_{ij}c'_j. \tag{41.2}$$

把这左边变形与右边比較能够求出 α_{ij}. 为了簡明地叙述这求法，引入下面的术語。

象前面那样，对于 $i\in\{1, 2,\cdots, d\}=J$, 滿足 $i\ll i'$, $i'\ll i''$, $\cdots$ 这样条件的 $\{i, i+1, \cdots, d\}$ 的子数列 $\{i, i', i'', \cdots\}$ 叫做 ***i* 容許数列**。i 容許数列当然由 $(d-i+1)$ 个以下的数构成，i 容許数列的个数是有限的。这个数用 s_i 表示。对于 i 容許数列中各个数作 G 中元 $h_{ii'}h_{i'i''}\cdots$, 它叫做**对应这容許数列的元**。($h_{ii'}$ 等由前面的定义及命題43的証明，由 $a_{ii'}B_{i'}=B_i$, $a_{ii'}=h_{ii'}\cdot k_{ii'}$, $h_{ii'}\in\mathfrak{H}_{i'}$, $k_{ii'}\in\mathfrak{K}_{i'}$ 等給出)。在对应这等 i 容許数列的元中，附以番号，假定为 $r_i^{(1)}$, $\cdots$, $r_i^{(\nu)}$, $\cdots$, $r_i^{(s_i)}$. 又把 $r_i^{(\nu)}$ 作"因数"的数(=(第 ν 个 i 容許数列的长)-1)根据是偶数或奇数命 $\varepsilon_i^{(\nu)}=1$ 或 -1. 又假定 $\varepsilon_i^{(0)}=1$, $r_i^{(0)}=e$.

引理 对于253頁定义的 u_i, 下面的公式成立:

$$u_i=\sum_{\nu=0}^{s_i}\varepsilon_i^{(\nu)}r_i^{(\nu)}. \tag{41.3}$$

証明 假如 $i=d$, 那末(41.3)两边都是1. 假如 $i=d-1$, 由定义，那末两边都是 $e-h_{i-1,d}$. 一般关于 $d-i$ 由归納法容易推得。 (証毕)

为了把(41.2)的左边变形，命 $(r_i^{(\nu)}a)^{-1}B_i=B_i^{(\nu)}$, $c_{B_i^{(\nu)}}=c_i^{(\nu)}$.

于是由命题 28，因为 $c_i r_i^{(\nu)} a = r_i^{(\nu)} a c_i^{(\nu)}$，所以

$$
\begin{aligned}
c_i' a c_j' = c_i u_i a c_j' = c_i \left(\sum_{\nu=0}^{s_i} \varepsilon_i^{(\nu)} r_i^{(\nu)}\right) a c_j' = \sum_{\nu=0}^{s_i} \varepsilon_i^{(\nu)} c_i r_i^{(\nu)} a c_j' \\
= \sum_{\nu=0}^{s_i} \varepsilon_i^{(\nu)} r_i^{(\nu)} a c_i^{(\nu)} c_j'.
\end{aligned}
\tag{41.4}
$$

在这右边的項假如 $B_j \not\succ B_i^{(\nu)}$，那末 $c_i^{(\nu)} c_j' = c_i^{(\nu)} c_j u_j = 0$。又假如 $B_j \gg B_i^{(\nu)}$，如果命 $a_{ij}^{(\nu)} B_j = B_i^{(\nu)}$，$a_{ij}^{(\nu)} = h_{ij}^{(\nu)} k_{ij}^{(\nu)}$，$h_{ij}^{(\nu)} \in \mathfrak{H}_j$，$k_{ij}^{(\nu)} \in \mathfrak{K}_j$，那末

$$r_i^{(\nu)} a c_i^{(\nu)} c_j' = r_i^{(\nu)} a c_i^{(\nu)} c_j u_j = r_i^{(\nu)} a a_{ij}^{(\nu)} c_j (a_{ij}^{(\nu)})^{-1} c_j u_j,$$

但

$$c_j (a_{ij}^{(\nu)})^{-1} c_j = c_j (h_{ij}^{(\nu)} k_{ij}^{(\nu)})^{-1} c_j = (\operatorname{sgn} k_{ij}^{(\nu)}) c_j^2 = \alpha (\operatorname{sgn} k_{ij}^{(\nu)}) c_j.$$

又因为 $$r_i^{(\nu)} a a_{ij}^{(\nu)} B_j = r_i^{(\nu)} a B_i^{(\nu)} = B_i,$$

所以能够命 $r_i^{(\nu)} a a_{ij}^{(\nu)} = a_{ij}$，于是

$$r_i^{(\nu)} a c_i^{(\nu)} c_j' = \alpha (\operatorname{sgn} k_{ij}^{(\nu)}) a_{ij} c_j u_j = \alpha (\operatorname{sgn} k_{ij}^{(\nu)}) a_{ij} c_j'.$$

再假如 $B_j = B_i^{(\nu)}$，因为 $r_i^{(\nu)} a B_j = B_i$，所以

$$r_i^{(\nu)} a = a_{ij}, \quad c_i^{(\nu)} c_j' = c_j c_j' = \alpha c_j',$$

因此 $$r_i^{(\nu)} a c_i^{(\nu)} c_j' = \alpha a_{ij} c_j'.$$

于是假如 $B_j \not\succ B_i^{(\nu)}$，那末 $\varepsilon_{ij}^{(\nu)} = 0$，假如 $B_j = B_i^{(\nu)}$，那末 $\varepsilon_{ij}^{(\nu)} = 1$，假如 $B_j \gg B_i^{(\nu)}$，如果命 $\varepsilon_{ij}^{(\nu)} = \operatorname{sgn} k_{ij}^{(\nu)}$，由 (41.4) 得

$$\frac{1}{\alpha} c_i' a c_j' = \left(\sum_{\nu=0}^{s_i} \varepsilon_i^{(\nu)} \varepsilon_{ij}^{(\nu)}\right) a_{ij} c_j'.$$

所以由 (41.2)，

$$a_{ij} = \sum_{\nu=0}^{s_i} \varepsilon_i^{(\nu)} \varepsilon_{ij}^{(\nu)}. \tag{41.5}$$

这就是求 a_{ij} 的公式。总結以上得下定理。

定理 32 于 n 阶对称群 $\mathfrak{S}_n$，在属于对应于台 D 的既約表現 ρ_D 的一个矩陣表現中，对应于 $a \in G$ 的能够象下面那样求得。把 D 上标准盘辞书式的順序排列，假定为 $B_1 < B_2 < \cdots < B_d$。d 是 ρ_D 的級数。对于 $J = \{1, 2, \cdots, d\}$ 中各元，作 i 容許数列，它的个数

假定是 $s_i(\geqslant 0)$。对应于各 i 容許数列的 G 中元假定是 $r_i^{(\nu)}$，$\nu=1,\cdots,s_i$. 命 $r_i^{(0)}=e$. 又由第 ν 个 i 容許数列的長是奇数，是偶数因而命 $\varepsilon_i^{(\nu)}=+1$ 或 -1，命 $\varepsilon_i^{(0)}=1$. 对于 $\nu=0,1,\cdots,s_i$，命 $(r_i^{(\nu)}a)^{-1}B_i=B_i^{(\nu)}$，如果 $B_i^{(\nu)}\not\ll B_j$，那末 $\varepsilon_{ij}^{(\nu)}=0$，如果 $B_i^{(\nu)}=B_j$，那末 $\varepsilon_{ij}^{(\nu)}=1$，如果 $B_i^{(\nu)}\ll B_j$，那末命 $a_{ij}^{(\nu)}B_j=B_i^{(\nu)}$，$a_{ij}^{(\nu)}=h_{ij}^{(\nu)}k_{ij}^{(\nu)}$，$h_{ij}^{(\nu)}\in\mathfrak{H}_j$，$k_{ij}^{(\nu)}\in\mathfrak{K}_j$，$\operatorname{sgn}k_{ij}^{(\nu)}=\varepsilon_{ij}^{(\nu)}$. 这样定义 $\varepsilon_i^{(\nu)}$，$\varepsilon_{ij}^{(\nu)}$ 时，由(41.5)給出的 α_{ij} 的矩陣 (α_{ij}) 成为对应于 a 的 ρ_D 的表現矩陣。

系　$\mathfrak{S}_n$ 的各既約表現类含有矩陣的所有元素都是有理整数的矩陣表現。

証明　因为在由定理32所作的表現矩陣中，$\varepsilon_i^{(\nu)}$ 所取的值是 ±1，$\varepsilon_{ij}^{(\nu)}$ 所取的值是0或 ±1，所以 $\alpha_{ij}\in\mathbf{Z}$.

例1　假定 $n=3$，$D=D(2,1)$，那末

$$B_1=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array},\quad B_2=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array},\quad d=2.$$

这时因为 $1\not\ll 2$，所以 $s_1=0$. s_2 当然是0. 于是这时在(41.5)右边只有一項，因为 $\varepsilon_i^{(0)}=1$，$r_i^{(0)}=e$，所以

$$\alpha_{ij}=\varepsilon_{ij}^{(0)},\quad a^{-1}B_i=B_i^{(0)}.$$

今試求对于 $a=(1\,2)$ 的表現矩陣。这时因为

$$B_1^{(0)}=(1\,2)B_1=\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1\\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array},\quad B_2^{(0)}=(1\,2)B_2=\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3\\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

	B_1	B_2
$B_1^{(0)}$	1	-1
$B_2^{(0)}$	0	-1

$B_1^{(0)}\ll B_1$　　$(1\,2)B_1=B_1^{(0)}$，$(1\,2)\in\mathfrak{H}_1$，$e\in\mathfrak{K}_1$，

$B_1^{(0)}\ll B_2$　　$(1\,3)(1\,2)B_2=B_1^{(0)}$，$(1\,3)\in\mathfrak{H}_2$，$(1\,2)\in\mathfrak{K}_2$，

$B_2^{(0)}\not\ll B_1$

$B_2^{(0)}\ll B_2$　　$(1\,2)B_2=B_2^{(0)}$，　　$(1\,2)\in\mathfrak{K}_2$，

所以 $\alpha_{ij}=\varepsilon_{ij}^{(0)}$ 的值如左表。

于是 $(1\,2)\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，同样得 $(1\,3)\to\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. 因为 $\mathfrak{S}_3$ 能够用(1 2)，(1 3)生成，所以用矩陣乘法由它能够求得对应于 $\mathfrak{S}_3$ 中各元的矩陣。(在这表

現中矩陣的元素都是 0 或 ± 1.)

例 2 假定 $n=5$, $D=D(3,2)$, 由 §40, 例 1 得

$$B_1=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array},\quad B_2=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array},\quad B_3=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array},$$

$$B_4=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array},\quad B_5=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array},\quad d_5=5.$$

这时因为 $1\ll 5$, 所以 $\{1, 5\}$ 是 1 容許数列, 其他情况为 $i<j\Rightarrow i\lessdot j$ 而对于 $i\geqslant 2$, i 容許数列不存在, 1 容許数列也只有 $\{1, 5\}$. 即 $s_1=1$, $s_2=s_3=s_4=s_5=0$. $a_{15}=(2\,4\,5\,3)=(2\,4)\ (3\,5)\ (3\,4)=(2\,5)\ (2\,4)\ (3\,5)$, $r_1^{(1)}=h_{15}=(2\,4)\,(3\,5)$, $(k_{15}=(3\,4))$, $\varepsilon_1^{(1)}=-1$. 于是試求对于 $a=(1,2)$ 的表現矩陣。

$$\begin{cases}\alpha_{1j}=\varepsilon_{1j}^{(0)}-\varepsilon_{1j}^{(1)},\\ \alpha_{ij}=\varepsilon_{ij}^{(0)},\ i\geqslant 2,\end{cases}\tag{1}$$

$$(r_i^{(0)}a)^{-1}B_i=(1\,2)\,B_i=B_i^{(0)},$$

因此
$$B_1^{(0)}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array},\quad B_2^{(0)}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array},$$

$$B_3^{(0)}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array},\quad B_4^{(0)}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&4\\\hline 1&5\\\cline{1-2}\end{array},\quad B_5^{(0)}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&5\\\hline 1&4\\\cline{1-2}\end{array}$$

又
$$(r_1^{(1)}a)^{-1}B_i=(1\,2)\,(3\,5)\,(2\,4)\,B_1=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&5\\\hline 1&3\\\cline{1-2}\end{array}=B_1^{(1)}.$$

由这与前例同样自下表得到所求矩陣。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
$B_1^{(0)}$, $B_1^{(1)}$	1, 0	0, 0	0, 0	−1, 0	0, 1
$B_2^{(0)}$	0	1	0	−1	0
$B_3^{(0)}$	0	0	1	0	−1
$B_4^{(0)}$	0	0	0	−1	0
$B_5^{(0)}$	0	0	0	0	−1

例如，$B_1^{(0)} \ll B_1$，$(1\,2)B_1 = B_1^{(0)}$，$(1\,2) \in \mathfrak{H}_1$，所以 $\varepsilon_{11}^{(0)} = 1$．因为 $B_1^{(1)} \not\ll B_1$，因此 $\varepsilon_{11}^{(1)} = 0$．于是把 1，0 記入左上位置，由(1)得

$$(1\,2) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

同样

$$(1\,2\,3\,4\,5) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\mathfrak{S}_5$ 能够用 $(1\,2)$，$(1\,2\,3\,4\,5)$ 生成，所以对应于其他元的矩陣都能够由上面两个相乘得出。

§ 42　Weyl 的相互律

在上 4 节（§ 38～§ 41），假定 $G = \mathfrak{S}_n$，但在这节 G 假定是一般的有限群，把 G 的群代数 $A(G)$ 略記为 A．又假定 ρ 是 G 的一个表現（不是既約的也可），ρ 的表現空間是 V．

在 § 26，把 $\mathfrak{L}(V)$ 的任意子集合，命名为 $\mathfrak{A}(V)$．对于 $\mathfrak{A}(V)$ 集合 S，

$$\{\tau;\ \tau \in \mathfrak{L}(V),\ \forall \sigma \in S,\ \sigma\tau = \tau\sigma\}$$

形成的 $\mathfrak{A}(V)$ 集合記成 S'，S' 已証明是 $\boldsymbol{C}$ 上代数。把 S' 也記成 $\mathfrak{C}(S)$，叫做 S 的**交換子代数**。$\rho(G) = \{\rho(x)\,;x \in G\}$ 是一个 $\mathfrak{A}(V)$ 集合，令命 $\mathfrak{C}(\rho(G)) = Z$．因为 Z 中元当然是 $\mathfrak{L}(V)$ 中元，所以对于 $\zeta \in Z$，$u \in V$ 有 $\zeta(u) \in V$．V 的子空間 W，对于 Z 中任意元 ζ 滿足 $\zeta(W) \subset W$ 时，W 叫做**对于 Z 不变**（或 **Z-不变**）。

H. Weyl 在他的"群論与量子力学"（1928 初版）中最后一章討論了量子力学中"对称問題"的对称群与旋轉群表現的关系，在

再版(1931)中,他用代数方法証明了当 $G=\mathfrak{S}_n$ 时 $A=A(G)=A(\mathfrak{S}_n)$ 的左理想与对 Z 不变的 V 的子空間之間"相互律"(后面的定理 33) 成立,把初版的理論簡化。茲介紹如下。

首先假定 V 的对偶空間 (§ 10) 是 $\hat{V}$. 对于 $u\in V$, $\varphi\in\hat{V}$ 把 $[u, \varphi]\in A$ 用下式定义:

$$[u, \varphi](x)=\varphi(\rho(x)u)=(\rho(x)u, \varphi), \ x\in G. \qquad (42.1)$$

(第三边的內积是 § 10, 47 頁的意义)。于是下面的命題成立。

命題 48 $[u, \varphi]$ 关于 u, φ 是双綫性的。即对于 $\lambda\in \boldsymbol{C}$, $u, v\in V$, $\varphi, \psi\in\hat{V}$,

$$[u+v, \varphi]=[u, \varphi]+[v, \varphi], \quad [\lambda u, \varphi]=\lambda[u, \varphi],$$
$$[u, \varphi+\psi]=[u, \varphi]+[u, \psi], \quad [u, \lambda\varphi]=\lambda[u, \varphi].$$

証明 由定义(42.1)自明。

命題 49 假如 $[u, \varphi]=[v, \varphi]$ 关于所有的 $\varphi\in\hat{V}$ 成立,那末 $u=v$.

証明 因为由前命題, $[u, \varphi]-[v, \varphi]=[u-v, \varphi]$, 所以証明 $(\forall\varphi\in\hat{V}, [u, \varphi]=0)\Rightarrow u=0$ 即可。但

$$\forall\varphi\in\hat{V}, \ [u, \varphi](e)=\varphi(\rho(e)u)=\varphi(u)=0,$$

所以 $$u=0. \qquad \text{(証毕)}$$

其次,象在 § 29 例 5 叙述那样,把 ρ 的定义域自 G 根据 $\rho(\sum_{x\in G}\lambda_x f_x)=\sum_{x\in G}\lambda_x\rho(x)$ 扩張到 A. 自扩張了的 A 到 $GL(V)$ 的映射仍記成 ρ. 又对于 $f\in A$, 用

$$\hat{f}(x)=f(x^{-1}), \ x\in G$$

定义 $\hat{f}\in A$.

例 1 $\widehat{fg}=\hat{g}\hat{f}$, $\hat{\hat{f}}=f$.

[解] 由定义显然。

例 2 对于定义于 237 頁的 H, K, c, 则 $\hat{H}=H$, $\hat{K}=K$, $\hat{c}=KH$ 成立。

[解] $H(x)=\begin{cases}1 & (x\in\mathfrak{H}),\\ 0 & (x\notin\mathfrak{H}).\end{cases}$ $\hat{H}(x)=H(x^{-1})=\begin{cases}1 & (x^{-1}\in\mathfrak{H}),\\ 0 & (x^{-1}\notin\mathfrak{H}).\end{cases}$

因为 $\mathfrak{H}$ 成群，所以 $x\in\mathfrak{H}\Leftrightarrow x^{-1}\in\mathfrak{H}$。因此 $H=\hat{H}$。同样 $K=\hat{K}$。因而

$$\hat{\mathfrak{S}}=(\widehat{HK})=\hat{K}\hat{H}=KH.$$

命題 50 对于 $f\in A$，有 $f[u,\varphi]=[u,{}^t(\rho(\hat{f}))\varphi]$。(${}^t(\rho(\hat{f}))$ 表示 $\rho(\hat{f})$ 的轉置映射。)

証明 由 §29 中 A 的积的定义，

$$\begin{aligned}(f[u,\varphi])(x)&=\sum_{y\in G}f(y^{-1})([u,\varphi](yx))\\&=\sum_{y\in G}f(y^{-1})(\rho(yx)u,\varphi)\\&=\sum_{y\in G}f(y^{-1})(\rho(y)\rho(x)u,\varphi)\\&=(\sum_{y\in G}f(y^{-1})\rho(y)\rho(x)u,\varphi)\\&=(\rho(\hat{f})\rho(x)u,\varphi)\\&=(\rho(x)u,{}^t(\rho(\hat{f}))\varphi).\end{aligned}$$

命題 51 对于 $f\in A$，有 $[u,\varphi]f=[\rho(\hat{f})u,\varphi]$。

証明

$$\begin{aligned}([u,\varphi]f)(x)&=\sum_{y\in G}[u,\varphi](xy)f(y^{-1})\\&=\sum_{y\in G}f(y^{-1})(\rho(x)\rho(y)u,\varphi)\\&=\sum_{y\in G}f(y^{-1})(\rho(y)u,{}^t(\rho(x))\varphi)\\&=(\rho(\hat{f})u,{}^t(\rho(x))\varphi)\\&=(\rho(x)\rho(\hat{f})u,\varphi).\end{aligned}$$

(証毕)

假如对于張量积 $V\otimes\hat{V}\ni u\otimes\varphi$，使 $\mathfrak{L}(V)$ 中把 $v\in V$ 映射于 $\varphi(v)u=(v,\varphi)u\in V$ 的元对应，那就得到自 $V\otimes\hat{V}$ 到 $\mathfrak{L}(V)$ 上作为向量空間的同构映射，这事实容易得知。由这对应，如果把 $V\otimes\hat{V}$ 与 $\mathfrak{L}(V)$ 同样看待，就有下面的命題。

命題 52 对于 $\tau\in GL(V)$，$u\in V$，$\varphi\in\hat{V}$，有

$$\tau\circ(u\otimes\varphi)=(\tau u)\otimes\varphi.$$

証明 对于任意 $v\in V$，

$$(\tau\circ(u\otimes\varphi))(v)=\tau((v,\varphi)u)=(v,\varphi)\tau u=((\tau u)\otimes\varphi)(v).$$

命題 53 $\tau=\sum_{x\in G}(\rho(x)u\otimes\varphi)\cdot\rho(x^{-1})\in Z$。

証明 对于任意 $y\in G$,

$$\rho(y)\tau\rho(y^{-1})=\sum_{x\in G}(\rho(yx)u\otimes\varphi)\rho(x^{-1}y^{-1})$$
$$=\sum_{z\in G}(\rho(z)u\otimes\varphi)\rho(z^{-1})=\tau。$$ （証毕）

以下假定 A 的左理想全体的集合是 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ 中元一般用 M 表示，对 Z 不变的子空間全体的集合是 $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}$ 中元一般用 W 表示，依照 Weyl 引入下面的記法:

$$^{\#}M=\{u;\ \forall\varphi\in\hat{V},\ [u,\ \varphi]\in M\},\tag{42.2}$$

$$^{\natural}W=\left\{f;\ f=\sum_{i=1}^{m}[u_i,\ \varphi_i],\ u_i\in W,\ \varphi_i\in\hat{V}\right\}$$
$$(m=1,\ 2,\ \cdots),\tag{42.3}$$

这里 u, f 当然分别是 V, A 中元。

命題 54 (i) $^{\#}M\in\mathfrak{W}$. (ii) $^{\natural}W\in\mathfrak{M}$。

(iii) $M\supset M'\Rightarrow{}^{\#}M\supset{}^{\#}M'$。

(iv) $W\supset W'\Rightarrow{}^{\natural}W\supset{}^{\natural}W'$. 特别 $^{\natural}V\supset{}^{\natural}W$。

証明 (i) 取任意 $\zeta\in Z$, $u\in{}^{\#}M$, 証明 $\zeta(u)\in{}^{\#}M$, 即 $\forall\varphi\in\hat{V}$, $[\zeta(u),\ \varphi]\in M$ 即可。因为

$$[\zeta(u),\ \varphi](x)=\varphi(\rho(x)\circ\zeta(u))=\varphi(\zeta\circ\rho(x)(u))$$
$$={}^{t}\zeta\circ\varphi(\rho(x)(u))=[u,\ {}^{t}\zeta\circ\varphi](x),$$

所以 $[\zeta(u),\ \varphi]=[u,\ {}^{t}\zeta\circ\varphi]$. 但 $u\in{}^{\#}M$, 所以它 $\in M$.

(ii) $^{\natural}W$ 成为 A 的子空間是明显的。更对于任意

$$x\in G,\quad {}^{\natural}W\ni f=\sum_{i=1}^{m}[u_i,\ \varphi_i]\quad(u_i\in W),$$

因为 $(xf)(y)=f(x^{-1}y)$ ❶ $=\sum_{i=1}^{m}(\rho(x^{-1}y)u_i,\ \varphi_i)$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\rho(y)u_i,\ {}^{t}\rho(x^{-1})\varphi_i)=\sum_{i=1}^{m}[u_i,\ {}^{t}\rho(x^{-1})\varphi_i](y),$$

---

❶ 因为 $(xf)(y)=(f_x\cdot f)(y)=\sum_{g\in G}f_x(yz^{-1})f(z)$. 而 $f_x(yz^{-1})$ 仅当 $x=yz^{-1}$, 即 $z=x^{-1}y$ 时不为 0, 其他都为 0, 所以 $(xf)(y)=f(x^{-1}y)$. ——譯者注

所以
$$xf=\sum_{i=1}^{m}[v_i,\ {}^t\rho(x^{-1})\varphi_i]\in {}^hW.$$

因此 ${}^hW\in\mathfrak{M}$。

(iii), (iv) 由定义自明。　　　　(証毕)

一般，有 ($\boldsymbol{C}$ 上) 向量空間 V 的子集合 M 时，由 M 生成的 V 的子空間 $[M]$ 叫做 M 的**綫性包絡** (linear envelope, lineare Hülle)。自 M 到又一向量空間 V' 中的映射 f 如果滿足条件：

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i=0\Longrightarrow\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(x_i)=0\quad(\lambda_i\in\boldsymbol{C},\ x_i\in M,\ k=1,\ 2,\ \cdots),$$

命

$$\tilde{f}\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i f(x_i)\quad(\mu_i\in\boldsymbol{C},\ x_i\in M,\ r=1,\ 2,\ \cdots),$$

那就容易理解 $\tilde{f}\in\mathfrak{L}([M],\ V')$。$\tilde{f}$ 叫做 f 的**綫性扩張**，通常用同一文字 f 表示。显然 $f([M])=[f(M)]$。

例 3　$\mathfrak{L}(V)$ 是 $GL(V)$ 的綫性包絡(让讀者考虑)。

例 4　$A=A(G)$ 是 G 的綫性包絡，在 181 頁例 5 中定义的 ρ 是对应于它的綫性扩張。

一般，假定 S 是一个代数系(群，代数等，但考虑代数时，基础体假定是 $\boldsymbol{C}$)，V 是 ($\boldsymbol{C}$ 上) 向量空間，ρ 是自 S 到 $\mathfrak{L}(V)$ 中的同态映射。这时 ρ 叫做在 V 中 S 的**表現**，V 叫做它的**表現空間**。S 的子集合 S_0 及它的表現 ρ_0 給定时，假如 S 是 S_0 的綫性包絡，那就能够得到作为 ρ_0 的綫性扩張的 S 的表現 ρ。

假定 ρ_1, ρ_2 是 S 的两个表現，它們的表現空間分別是 V_1, V_2，而

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1(x)} & V_1 \\ \Phi\downarrow & & \downarrow\Phi \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_2(x)]{} & V_2 \end{array}$$

Φ 是自 V_1 到 V_2 作为向量空間的同构映射，当

$$\forall x\ni S,\quad \rho_2(x)\circ\Phi=\Phi\circ\rho_1(x)$$

时 (与群的表現情況同样)，ρ_1 与 ρ_2 叫做**等价**，V_1 与 V_2 叫做**作为 S 的表現空間同构**。写成 $\rho_1\sim\rho_2$，$V_1\sim V_2$。不变子空間的概念也与群表現时的同样定义，即

代数系 S 的表現 ρ 的表現空間 V 的子空間 W，如果是 $\mathfrak{A}(V)$ 集合 $\rho(S)$ 的不变子空間 (168 頁)，W 叫做 V 的 **S-不变子空間。**

例 5 假定 S 是 $\mathfrak{A}(V)$ 集合又成为一个代数系。这时 $\rho(x)=x$，$x\in S$ 的表現 ρ 給出 S 的同构表現。它叫做 S 的自然表現。

例 6 假定 S 与例 3 同样，如果取 V 的 S-不变子空間 W_1，W_2，那就得到 $\rho_i(x)=x|W_i$ 的表現 $\rho_i(i=1, 2)$，为了 $\rho_1\sim\rho_2$ 或 $W_1\sim W_2$，下面的条件是必要充分的：存在滿足 $\forall x\in S$，$\forall u\in W_1$，$x\circ\Phi(u)=\Phi\circ x(u)$ 这样自 W_1 到 W_2 作为向量空間的同构映射 Φ。

假定 $\mathfrak{M}$ 的元中，含于 $^\natural V$ 的全体集合是 $\mathfrak{M}_0$❶，那末由命題 54 (iv) 得 $^\natural W\in\mathfrak{M}_0$。因为 $\mathfrak{M}$ 中元(因而当然 $\mathfrak{M}_0$ 中元)都是 G 的左正則表現的表現空間，所以 A 也是它的綫性扩張表現的表現空間。又因为 $\mathfrak{W}\ni W$ 是 Z-不变子空間，所以存在把 W 作为表現空間 $\rho(\zeta)=\zeta|W$，$\zeta\in Z$，这样代数 Z 的表現。

Weyl 的相互律是表示在作为表現空間的集合 $\mathfrak{W}$，$\mathfrak{M}_0$ 之間，根据 $\#$，$\natural$ 有保存作为表現空間同构关系的一对一的对应，即下面的定理成立。

定理 33 (Weyl) 假定 A 是有限群 G 的群代数，ρ 是 G 的表現，V 是 ρ 的表現空間，Z 是 $\rho(G)\ (\subset GL(V))$ 的交換子代数。把 A 的左理想集合作为 $\mathfrak{M}$，V 的 Z-不变子空間的集合作为 $\mathfrak{W}$。对于 $u\in V$，$\varphi\in\hat{V}$，由 (42.1) 定义 $[u, \varphi]\in A$，对于 $M\in\mathfrak{M}$，$W\in\mathfrak{W}$，由 (42.2)，(42.3) 定义 $^\# M$，$^\natural W$。又假定 $\mathfrak{M}$ 的元中含于 $^\natural V$ 的集合是 $\mathfrak{M}_0$，那末对于 M，$M'\in\mathfrak{M}_0$，W，$W'\in\mathfrak{W}$，

(i) $^{\natural\#}M=M$． (ii) $^{\#\natural}W=W$．

(iii) $^\#(M\oplus M')={}^\# M\oplus{}^\# M'$， $^\natural(W\oplus W')={}^\natural W\oplus{}^\natural W'$．

(iv) $M\sim M'\Leftrightarrow{}^\# M\sim{}^\# M'$， $W\sim W'\Leftrightarrow{}^\natural W\sim{}^\natural W'$．

---

❶ 因为一般 $^\natural V\subset A(G)$，但可能 $^\natural V\neq A(G)$，又由命題 54，$^\natural V$ 是 $A(G)$ 的左理想，所以它含有 $A(G)$ 中的左理想，但不一定包含 $A(G)$ 中所有左理想。——譯者注

这定理的証明在本质上是引用上面諸命題，再把下面三个引理作为准备。首先注意由 § 37 命題 20，$\mathfrak{M}$ 中元 M 能够用 A 中适当幂等元 ε 写成 $A\varepsilon$ 的形状。

引理 1　假定把 $\mathfrak{M}$ 中任意元 M 写成 $M=A\varepsilon$（ε 是幂等元），那末

$$^{\#}M=\rho(\hat{\varepsilon})V.$$

証明　由下面的关系显然。

$u\in {}^{\#}M\Leftrightarrow\forall\varphi\in\hat{V},\ [u,\ \varphi]\in M$

$\Leftrightarrow\forall\varphi\in\hat{V},[u,\varphi]\varepsilon=[u,\varphi]$（由 230 頁命題 20 上 2 行）

$\Leftrightarrow\forall\varphi,\ [\rho(\hat{\varepsilon})u,\ \varphi]=[u,\ \varphi]$（由命題 51）

$\Leftrightarrow\rho(\hat{\varepsilon})u=u$（由命題 49）

$\Leftrightarrow u\in\rho(\hat{\varepsilon})V$（由 $\Leftarrow u=\rho(\hat{\varepsilon})V\Rightarrow\rho(\hat{\varepsilon})u=u$）。

引理 2　$^{\natural\#}M\subset M$，$^{\#\natural}W\supset W$。

証明　由定义自明。

引理 3　$^{\natural}V$ 是两側理想。

証明　$^{\natural}V$ 当然是左理想。在証明它又是右理想时，証明对于任意 $f\in A$，$^{\natural}V\cdot f\subset{}^{\natural}V$ 即可。假定

$$^{\natural}V\ni g=\sum_{i=1}^{m}[u_i,\ \varphi_i],\quad u_i\in V,$$

那末
$$gf=\sum_{i=1}^{m}[u_i,\ \varphi_i]f=\sum_{i=1}^{m}[\rho(\hat{f})u_i,\ \varphi_i].$$

这里当然 $\rho(\hat{f})u_i\in V$，所以 $gf\in{}^{\natural}V$。

定理 33 的証明　(i) 假如用幂等元 ε 写成 $M=A\varepsilon$，因为 $M\subset{}^{\natural}V$，所以 $f\in M$ 能够写成

$$f=f\varepsilon=\sum_{i=1}^{m}[u_i,\ \varphi_i]\varepsilon=\sum_{i=1}^{m}[\rho(\hat{\varepsilon})u_i,\ \varphi_i],\quad u_i\in V.$$

由引理 1，$\rho(\hat{\varepsilon})u_i\in\rho(\hat{\varepsilon})V={}^{\#}M$。所以 $f\in{}^{\natural\#}M$。因此 $M\subset{}^{\natural\#}M$。由这与引理 2 即得到 $M={}^{\natural\#}M$。

(ii) 假如用幂等元 ε 写成 ${}^{\natural}W = A\varepsilon$，那末由引理 1，${}^{\#\natural}W = \rho(\hat{\varepsilon})V$。因此

$$\rho(\hat{\varepsilon}) = \sum_{x\in G}\hat{\varepsilon}(x^{-1})\rho(x^{-1}) = \sum_{x\in G}\varepsilon(x)\rho(x^{-1}).$$

又因为 $\varepsilon\in {}^{\natural}W$，所以

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{m}[u_i,\ \varphi_i](x) = \sum_{i=1}^{m}(\rho(x)u_i,\ \varphi_i),\quad u_i\in W.$$

于是(用引理 1 的証明中最后行)

$$^{\#}W \ni v = \rho(\hat{\varepsilon})v = \sum_{i=1}^{m}\sum_{x\in G}(\rho(x)u_i,\ \varphi_i)\rho(x^{-1})v$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{x\in G}(\rho(x^{-1})v\otimes\varphi_i)\rho(x)u_i.$$

但由命題 53，$\sum_{x\in G}(\rho(x^{-1})v\otimes\varphi_i)\rho(x)\in Z$。由这与 $u_i\in W$ 得

$$\sum_{x\in G}(\rho(x^{-1})v\otimes\varphi_i)\rho(x)u_i\in W.$$

所以 $v\in W$。因此 ${}^{\#\natural}W\subset W$。由这与引理 2 卽得 ${}^{\#\natural}W = W$。

(iii) 因为 $M,\ M'\subset M\oplus M'$，所以 ${}^{\#}M,\ {}^{\#}M'\subset {}^{\#}(M\oplus M')$。因此 ${}^{\#}M\oplus{}^{\#}M'\subset{}^{\#}(M\oplus M')$。再因为 ${}^{\#}M,\ {}^{\#}M'\subset{}^{\#}M\oplus{}^{\#}M'$，所以 $M,\ M'\subset{}^{\natural}({}^{\#}M\oplus{}^{\#}M')$。因此 $M\oplus M'\subset{}^{\natural}({}^{\#}M\oplus{}^{\#}M')$。于是 ${}^{\#}(M\oplus M')\subset{}^{\#}M\oplus{}^{\#}M'$。所以

$${}^{\#}(M\oplus M') = {}^{\#}M\oplus{}^{\#}M'.$$

同样
$${}^{\natural}(W\oplus W') = {}^{\natural}W\oplus{}^{\natural}W'.$$

对于 (iv)，証明 $M\sim M'\Rightarrow{}^{\#}M\sim{}^{\#}M'$，$W\sim W'\Rightarrow{}^{\natural}W\sim{}^{\natural}W'$ 两条卽可。

假定 $M\sim M'$。由命題 22 系 2，M 与 M' 之間的同构对应能够用适当的 $f_0,\ f'_0\in A$，由

$$f' = ff_0,\ f = f'f'_0\quad (f\in M,\ f'\in M')$$

給出，对于所有的 $f\in M$ 有 $f = ff_0f'_0$。现在假定 $u\in{}^{\#}M$，那末

$\forall\varphi\in\hat{V}$, $[u, \varphi]\in M$. 于是 $\forall\varphi$, $[\rho(\hat{f}_0)u, \varphi]=[u, \varphi]f_0\in M'$. 所以 $\rho(\hat{f}_0)u\in{}^{\#}M'$. 因此假如对于 u, 使 $\rho(\hat{f}_0)u$ 对应的映射是 Φ: ${}^{\#}M\to{}^{\#}M'$, 那就来証明 Φ 給出自 ${}^{\#}M$ 到 ${}^{\#}M'$ 的同构映射。与 Φ 同样, Ψ: ${}^{\#}M'\to{}^{\#}M$, 由 $\Psi(u')=\rho(\hat{f}'_0)u'$ $(u'\in{}^{\#}M')$ 定义,

$$\forall\varphi,\ [\Psi\Phi(u), \varphi]=[\rho(\hat{f}'_0)\rho(\hat{f}_0)u, \varphi]=[\rho(\widehat{f_0f'_0})u, \varphi]$$

$$=[u, \varphi]f_0f'_0=[u, \varphi].$$

所以由命題 49, $\Psi\Phi(u)=u$. 同样 $\Phi\Psi(u')=u'$. 因此由 28 頁例 10, Φ, Ψ 是全单射且互为逆映射, 并且显然 Φ 是綫性映射。又对于任意 $\zeta\in Z$, 因为 $\zeta\Phi=\Phi\zeta$, 所以 Φ 給出自 ${}^{\#}M$ 到 ${}^{\#}M'$ 作为表現空間的同构映射。因此 ${}^{\#}M\sim{}^{\#}M'$.

其次, 假定 $W\sim W'$. 即有自 W 到 W' 的同构对应 Φ, 对于任意 $\zeta\in Z$, 假定 $\zeta\Phi=\Phi\zeta$. 这时对于

$${}^{\natural}W\ni f=\sum_{i=1}^{m}[u_i, \varphi_i]\quad(u_i\in W,\ \varphi_i\in\hat{V}),$$

如果
$$g=\sum_{i=1}^{m}[\Phi(u_i), \varphi_i],$$

显然 $g\in{}^{\natural}W'$, 但由对于 f 使与 g 对应能够得到 ${}^{\natural}W$ 与 ${}^{\natural}W'$ 之間作为表現空間的同构对应, 这事实示明如下。

首先, 示明不論 f 的表示方法如何, g 对于 f 是唯一地确定。为此証明 $f=0\Rightarrow g=0$ 即可。假定 $u\in V$, 如果命

$$\tau_i(u)=\sum_{x\in G}(\rho(x)u\otimes\varphi_i)\rho(x^{-1}),$$

那末

$$\rho(\hat{f})u=\sum_{x\in G}f(x^{-1})\rho(x)u=\sum_{x\in G}\sum_{i=1}^{m}(\rho(x^{-1})v_i, \varphi_i)\rho(x)u$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{x\in G}(\rho(x)u\otimes\varphi_i)\rho(x^{-1})u_i=\sum_{i=1}^{m}\tau_i(u)v_i.$$

假如命 $\Phi(u_i)=v_i$, 同样得

$$\rho(\hat{g})u=\sum_{i=1}^{m}\tau_i(u)v_i.$$

由命题 53，因为 $\tau_i(u)\in Z$，所以

$$\rho(\hat{g})u=\sum_{i=1}^{m}\tau_i(u)\Phi(u_i)=\sum_{i=1}^{m}\Phi\tau_i(u)u_i=\Phi(\rho(\hat{f})u).$$

因此 $\quad f=0\Rightarrow\forall u\in V,\quad \rho(\hat{f})u=0$

$$\Rightarrow\forall u\in V,\quad \rho(\hat{g})u=0$$

$$\Rightarrow\forall u\in V,\quad \forall\varphi\in\hat{V},\ [\rho(\hat{g})u,\ \varphi]=[u,\ \varphi]g=0.$$

因为 ${}^{\natural}V$ 中元能够表示为 $\sum_{i=1}^{m}[u_i,\ \varphi_i]$，$u_i\in V$，$\varphi_i\in\hat{V}$ 形状，所以如果 $f=0$，那末 ${}^{\natural}V\cdot g=0$。由引理 3 有满足 ${}^{\natural}V\ni\varepsilon$，$\forall h\in{}^{\natural}V$，$\varepsilon h=h$ 的幂等元 ε。因此 $g=\varepsilon g=0$。

假定由以上所定义的自 ${}^{\natural}W$ 到 ${}^{\natural}W'$ 的映射是 Φ'，与前半段同样考察，得知 Φ' 是全单射。又 Φ' 显然是綫性映射。对于任意 $x\in G$，$f\in W$，

$$\Phi'x(f)=\Phi'x\Big(\sum_{i=1}^{m}[u_i,\ \varphi_i]\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\Phi'(x[u_i,\ \varphi_i])\quad(u_i\in W,\ \varphi_i\in\hat{V})$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\Phi'([u_i,\ {}^{t}\rho(x^{-1})\varphi_i])\quad(\text{命题 }50)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}[v_i,\ {}^{t}\rho(x^{-1})\varphi_i]$$

$$=x\sum_{i=1}^{m}[v_i,\ \varphi_i]=x\Phi'(f)\quad(v_i=\Phi(u_i)\in W').$$

因此 ${}^{\natural}W\sim{}^{\natural}W'$。

系 把 $M\in\mathfrak{M}_0$，$W\in\mathfrak{W}$ 分别看成 G，$Z=\mathfrak{C}(\rho(G))$ 的表現空間时，如果 M 是既約，那末 ${}^{*}M$ 也是既約。又如果 W 是既約，那末 ${}^{\natural}W$ 也是既約。

§43 一般綫性变换群的張量表現

假定 M 是固定的自然数，V 是 C 上 m 維向量空間。V 的一般綫性变换群为 $\mathfrak{G}=GL(V)$，$\mathfrak{G}$ 当然是无限群。在本章直到現在只以討論有限群的表現为主，在这最后一节来考虑无限群 $\mathfrak{G}$ 的表現。

$\mathfrak{G}$ 能够看成为它自身 $\mathfrak{G}$ 的表現，这是 $\mathfrak{G}$ 的"自然表現"(§25，例3)。这自然表現用 σ 表示。n 个 σ 的張量积 $\underbrace{\sigma\otimes\cdots\otimes\sigma}_{n\text{个}}=\sigma^n$，成为把 m^n 維向量空間 $V\otimes\cdots\otimes V=V^n$ 作为表現空間的 $\mathfrak{G}$ 的表現。σ^n 叫做 **n 阶的張量表現**(更由264頁 σ^n 也能够在 $\mathfrak{G}=GL(V)$ 的綫性包絡 $\mathfrak{L}(V)$ 中定义。因此 $\sigma^n(\mathfrak{L}(V))$ 也有意义)。如在§25，例6中注意的那样，σ 是 $\mathfrak{G}$ 的旣約表現，但 σ^n 当然一般不是旣約(因为 $\mathfrak{G}$ 不是有限群)，作为有限群表現論出发点的定理8在这里也不能使用。但应用前节定理33，張量表現 σ^n 是完全可約，并且这旣約表現的直和分解能够用 n 阶对称群 $G=\mathfrak{S}_n$ 的表現理論求得。为了簡單起見，以下固定取 V 的一个基底 $\{u_1,\cdots,u_m\}$，就由它用127頁的方法构成的 V^n 的基底 $\{u^{(1)},\cdots,u^{(m^n)}\}$ ($u^{(1)}=\underbrace{u_1\otimes\cdots\otimes u_1}_{n\text{个}}$, $u^{(2)}=\underbrace{u_1\otimes\cdots\otimes u_1}_{(n-1)\text{个}}\otimes u_2$, $\cdots$, $u^{(m^n)}=\underbrace{u_m\otimes\cdots\otimes u_m}_{n\text{个}}$) 来討論。

首先对于 $G=\mathfrak{S}_n\ni x$ 定义 $\rho(x)\in GL(V^n)$ 如下：

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于 } V^n \text{ 的基底 } u^{(i)}=u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n},\\ \qquad\rho(x)u^{(i)}=u_{j_{x(1)}}\otimes\cdots\otimes u_{j_{x(n)}},\\ \text{对于 } V^n \text{ 的一般元 } v=\sum_{i=1}^{m^n}\lambda^{(i)}u^{(i)},\\ \qquad\rho(x)v=\sum_{i=1}^{m^n}\lambda^{(i)}\rho(x)u^{(i)}.\end{array}\right\}\tag{43.1}$$

这样，ρ 显然是 G 把 V^n 作为表現空間的表現。

例1 假定 $m=4$，$n=3$，如果 $x=(1\,3\,2)$，那末

$$\rho(x)(u_1\otimes u_4\otimes u_2)=u_2\otimes u_1\otimes u_4.$$

一般，假如
$$\mathfrak{S}_n\ni x=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix},$$

那末
$$\rho(x)(u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n})=u_{j_{\nu_1}}\otimes\cdots\otimes u_{j_{\nu_n}}.$$

例 2 假定 $\rho(x)u^{(i)}=u^{(i')}$，x 是自然数 $i\,(1\leqslant i\leqslant m^n)$ 的函数，对于 i 的値看成为 i'。这函数关系用
$$i'=x[i]$$
表示。即
$$\rho(x)u^{(i)}=u^{x[i]}.$$
又命
$$x=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}\text{时，}\ x(\mu)=\nu_\mu,$$
那末 $x(\mu)$ 是定义于自然数 $\mu\,(1\leqslant\mu\leqslant n)$ 而与 $x[i]$ 完全不同的函数。这函数 $x(\mu)$ 在(43.1)已經引用。这記法 $x[i]$，$x(\mu)$ 在以下常常引用。

关于把上面那样定义的 V^n 作为表現空間的 G 的表現 ρ 与 $\mathfrak{G}$ 的張量表現 σ^n 間的关系，有下面重要的命題。

命題 55 假定 ρ 是在上面定义的 G 的表現，如果 $\rho(G)$ 的交换子代数 $\mathfrak{C}(\rho(G))$ 是 $Z(\subset GL(V^n))$ 时，那末 V^n 的子空間 W 是 Z-不变与 W 是 $\sigma^n(\mathfrak{G})$-不变是同一回事。

$$\begin{array}{ccl}\mathfrak{G}=GL(V) & \xrightarrow{\ \sigma^n\ } & V^n\supset W\in\mathfrak{W}\\ & \overset{\rho}{\nearrow} & \#\uparrow\downarrow\natural\ \ \#\uparrow\downarrow\natural\\ G=\mathfrak{S}_n & \xrightarrow[\text{正則表現}]{} & A\supset{}^\natural V^n\supset M\in\mathfrak{M}.\end{array}$$

今假定承认这命題，如果把前节的 G，ρ 分别作为是在上面所定义的，那末前节的 $\mathfrak{W}$ 能够看成为 $\mathfrak{G}$ 的表現 σ^n 的表現空間的子表現空間的全体。这样由定理 33 (Weyl 的相互律)，$\mathfrak{G}$ 的表現空間 W 与含于 ${}^\natural V^n$ 的 $A=A(G)$ 的左理想 M 之間一对一的对应成立，$\mathfrak{G}$ 的既約表現空間都能够自含于 ${}^\natural V^n$ 的既約左理想 $M=Ac$ 由作 ${}^\# M=\rho(\hat{c})V$ 的操作得出。又 W_1，$W_2\in\mathfrak{W}$ 是否是等价的表現空間，由 $A(G)$ 中对于它們的左理想 ${}^\natural W_1$，${}^\natural W_2$，是否是等价来确

定。更有限群 G 的表現是完全可約。

因为 ${}^{\sharp}V^n$ 能够直和分解为

$${}^{\sharp}V^n = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k,$$

$$(M_i,\ i=1,\ \cdots,\ k \text{ 是 } A(G) \text{ 的旣約左理想})$$

形状，所以对于它的 σ^n 的表現空間也能够分解为旣約表現空間的直和

$$V^n = {}^{\sharp}M_1 \oplus \cdots \oplus {}^{\sharp}M_k.$$

因此得知 σ^n 是完全可約的。又 ${}^{\sharp}M_i$ 在 V^n 的重复度显然与 M_i 在 ${}^{\sharp}V^n$ 的重复度一致。因为关于 $G=\mathfrak{S}_n$ 的表現在 §38～§41 已詳叙，所以利用它能够解决关于 σ^n 同种类的問題。对于这些結果汇集作为后面的定理 34 来叙述。再判别 $A(G)$ 的旣約左理想含于 ${}^{\sharp}V^n$ 与否的問題是新发生的，但它也能够用 $G=\mathfrak{S}^n$ 的台来簡单的解决。这事实也在定理 34 中叙述，証明也在那里給出。

其次，为了証明命題 55 及定理 34 需准备两个必要概念和几个引理。

对于 G 的子群 H，把满足 $V^n \ni v$, $\forall x \in H$, $\rho(x)v = v$ 的，叫做 n 阶关于 H 的**对称張量**，把满足 $V^n \ni w$, $\forall x \in H$, $\rho(x)w = (\operatorname{sgn} x)w$ 的，叫做 n 阶关于 H 的**反对称張量**。当 $H = G$ 时“关于 G”这語省略。

n 阶的对称張量全体 S^n，反对称張量全体 S'^n 显然分別构成 V^n 的子向量空間。

例 3　$m=2$，$n=2$ 时，$V^n = V^2$ 的基底由 $u^{(1)} = u_1 \otimes u_1$，$u^{(2)} = u_1 \otimes u_2$，$u^{(3)} = u_2 \otimes u_1$，$u^{(4)} = u_2 \otimes u_2$ 四个元构成，它們中 $u^{(1)}$，$u^{(4)} \in S^2$。又因为 $\rho(1\,2)u^{(2)} = u^{(3)}$，所以由 $u^{(i)}$ 的无关性，$\sum_{i=1}^{4} \lambda^{(i)} u^{(i)} \in S^2 \Leftrightarrow \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$。因此 $u^{(1)}$，$u^{(2)} + u^{(3)}$，$u^{(4)}$ 三个元构成 S^2 的基底。一般，对于 V^n 的基底 $u^{(i)} = u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_n}$，如果命 $\sum_{x \in G} \rho(x) u^{(i)} = S(u^{(i)})$，在 $j_1, \cdots, j_n$ 中假如 1 有 $\mu_1^{(i)}$ 个，$\cdots$，m 有 $\mu_m^{(i)}$ 个 $(\mu_1^{(i)} + \cdots + \mu_m^{(i)} = n)$ 时，那末 $S(u^{(i)}) = S(u^{(i')}) \Leftrightarrow \mu_1^{(i)} = \mu_1^{(i')}$，$\cdots$，$\mu_m^{(i)}$

$=\mu_m^{(i')}$❶，总共做成$\binom{n+m-1}{n}$个$S(u^{(i)})$❷它們构成S^n的基底是容易理解的。因此

$$\dim S^n=\binom{n+m-1}{n}.$$

例 4 $m=2$, $n=2$ 时，用与上同样記法，那末$S'^n=S'^2$的基底是$u^{(2)}-u^{(3)}$，$\dim S'^2=1$，一般，假如V^n中元$v=\sum\lambda^{(i)}u^{(i)}=\sum\lambda_{j_1\cdots j_n}u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n}\in S'^n$，例如，如果$j_1=j_2$，那末

$$\begin{aligned}\rho(1\ 2)v&=\lambda_{j_1j_2\cdots j_n}u_{j_2}\otimes u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n}+\cdots\\&=\lambda_{j_1j_2\cdots j_n}u_{j_1}\otimes u_{j_2}\otimes\cdots\otimes u_{j_n}+\cdots\\&=-v=-\lambda_{j_1j_2\cdots j_m}u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n}+\cdots,\end{aligned}$$

---

❶ 假如在$\mu^{(i)}$中有$\mu_1^{(i)}$个1，$\mu_2^{(i)}$个2，…，$\mu_m^{(i)}$个m，在$\mu^{(i')}$中有$\mu_1^{(i')}$个1，$\mu_2^{(i')}$个2，…，$\mu_m^{(i')}$个m，那末$S(u^{(i)})=S(u^{(i')})$。例如$m=2$，$n=3$，$V^n=V^3$。假設$u^{(i)}=u_1\otimes u_2\otimes u_2$，$u^{(i')}=u_2\otimes u_1\otimes u_2$，則$\mu_1^{(i)}=1$，$\mu_2^{(i)}=2$，$\mu_1^{(i')}=1$，$\mu_2^{(i')}=2$，此时

$$\begin{aligned}S&=\sum_{x\in G}\rho(x)=\rho(1)+\rho(1\,2)+\rho(1\,3)+\rho(2\,3)+\rho(1\,2\,3)+\rho(1\,3\,2),\\S(u^{(i)})&=\sum_{x\in G}\rho(x)(u^{(i)})=u_1\otimes u_2\otimes u_2+u_2\otimes u_1\otimes u_2+u_2\otimes u_2\otimes u_1\\&\quad+u_1\otimes u_2\otimes u_2+u_2\otimes u_2\otimes u_1+u_2\otimes u_1\otimes u_2,\\S(u^{(i')})&=\sum_{x\in G}\rho(x)(u^{(i')})=u_2\otimes u_1\otimes u_2+u_1\otimes u_2\otimes u_2+v_2\otimes u_1\otimes u_2\\&\quad+u_2\otimes u_2\otimes u_1+u_1\otimes u_2\otimes u_2+u_2\otimes u_2\otimes u_1.\end{aligned}$$

所以$S(u^{(i)})=S(u^{(i')})$。

反之，假如$S(u^{(i)})=S(u^{(i')})$，那末$\mu_1^{(i)}=\mu_1^{(i')}$，…，$\mu_m^{(i)}=\mu_m^{(i')}$，这是因为$u^{(i)}$中含的个数$\mu_1^{(i)}$不因置换S而改变，如果$\mu_1^{(i)}\neq\mu_1^{(i')}$，那末$u^{(i)}$必不在上式中的右边出現，并且当$x\neq1$时$u^{(i)}\neq\rho(x)u^{(i)}$，因此由等式$S(u^{(i)})=S(u^{(i')})$可推出$u^{(i)}$可由其他基底$u^{(j)}$綫性表示，而这与假定相反。——譯者注

❷ $S(u^{(i)})$显然是属于S^n，反之，如果$u\in S^n$，那末$u\in V^n$，因此u可以用基底$u^{(i)}$綫性表示。假定

$$u=\lambda_1u^{(1)}+\lambda_2u^{(2)}+\cdots+\lambda_pu^{(p)},$$

那末

$$S(u)=S(\lambda_1u^{(1)}+\lambda_2u^{(2)}+\cdots-\lambda_pu^{(p)})=\lambda_1S(u^{(1)})+\lambda_2S(u^{(2)})+\cdots+\lambda_pS(u^{(p)}),$$

由假定$S(u)=u$，所以

$$u=\lambda_1S(u^{(1)})+\lambda_2S(u^{(2)})+\lambda_pS(u^{(p)}).$$

因此$S(u^{(1)})$，…，$S(u^{(p)})$是S^n的基底。

又因为$S(u^{(i)})$的个数等于$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m=n$中非負的整数解的个数，把它記

因此 $\lambda_{j_1j_2\cdots j_n}=0$. 同样用例3的記法,假如 $\mu_1^{(i)}, \cdots, \mu_m^{(i)}$ 中只要有一个>1,那末 $\lambda^{(i)}=0$. 特别,假如 $m<n$, 那末 $S'^n=0$. 假如 $m=n$,那末 $\dim S'^n=1$,S'^n 的基底由下面的元給出: $\sum_{x\in \mathfrak{S}} (\operatorname{sgn} x)\rho(x)(u_1\otimes\cdots\otimes u_n)$. 假如 $m>n$, 那末 $\dim S'^n=\binom{m}{n}$, S'^n 的基底当 $\{j_1, \cdots, j_n\}\subset\{1, 2, \cdots, m\}$时, 由 $\sum_{x\in \mathfrak{S}} (\operatorname{sgn} x)\cdot\rho(x)(u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n})$ 給出。

引理 1 假定 $u\in V$,那末 $\underbrace{u\otimes\cdots\otimes u}_{n\text{个}}\in S^n$. 又 S^n 与 $\{u\otimes\cdots\otimes u;\ u\in V\}$ 的綫性包絡 S_0^n 一致。

証明 前半段及 $S^n\supset S_0^n$ 是明显的。为了証明 $S^n\subset S_0^n$, 考虑 V^n 的对偶空間 $\hat{V}^n$, 在 $\hat{V}^n$ 的元中与 S^n, S_0^n 直交的全体(在 49 頁的意义下是 S^n,S_0^n 的零化空間)分别用 T^n,T_0^n 表示。这时 $T^n\supset T_0^n$,即对

成 $N(m, n)$, 那末它就等于 $(z_1+z_2+\cdots+z_m)^n$ 的展开式中所含 $z_1\cdots z_m$ 的乘积的項数,如果令 $z_1+(z_2+\cdots+z_m)=z_1+V$, 并将 $(z_1+V)^n$ 按二項式展开,再将 $V=z_2+\cdots+z_m$ 展开就可以看出下面的等式是成立的

$$N(m, n)=N(m, n-1)+N(m-1, n). \tag{1}$$

上式中的 $N(m, n-1)$ 是含 z_1 的項数, $N(m-1, n)$ 是不含 z_1 的項数。

又因为对于任意 m, $N(m, 1)=m$, 对于任意 n, $N(1, n)=1$. 因此在(1)式中如果令 $m=2$. 就得到

$$N(2, n)=1+N(2, n-1),$$

同样

$$N(2, n-1)=1+N(2, n-2),$$

因为

$$N(2, 1)=2,$$

所以从上面諸式即得 $N(2, n)=n+1$.

再在(1)式中令 $m=3$ 就有

$$N(3, n)=N(3, n-1)+N(2, n),$$

同样

$$N(3, n-1)=N(3, n-2)+N(2, n-1),$$

$$\cdots\cdots$$

$$N(3, 2)=N(3, 1)+N(2, 1),$$

$$N(3, 1)=3.$$

由以上諸式即得

$$N(3, n)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

一般由(1)对于 m 用数学归納法即得

$$N(m, n)=\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}=\binom{n+m-1}{n}.$$ ——譯者注

于 $\varphi\in\hat{V}^n$ 証明 $(\forall u\in V,\ \varphi(u\otimes\cdots\otimes u)=0\Rightarrow\forall v\in S^n,\ \varphi(v)=0$ 即可。因为象在例 3 所示的那样，能够取 $S(u^{(i)})$ 作为 S^n 的基底，所以 $\forall v\in S^n,\ \varphi(v)=0\Leftrightarrow\forall i,\ \varphi(S(u^{(i)}))=0$. 今假定

$$u=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j,$$

那末
$$u\otimes\cdots\otimes u=\sum\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_n}u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n}.$$

因此，假如 $\forall u\in V,\ \varphi(u\otimes\cdots\otimes u)=0$, 那末

$$\sum\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_n}\varphi(u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n})=0$$

对于 $\forall\lambda_j\in\boldsymbol{C}$ 成立。于是 j_ν 独立变动于 $\{1,2,\cdots,m\}$, $\sum$ 就取 m^n 个項。命 $u^{(i)}=u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n}$, $u^{(i')}=u_{j'_1}\otimes\cdots\otimes u_{j'_n}$, 用例 3 的記法，如果 $\mu_1^{(i)}=\mu_1^{(i')}=\mu_1,\ \cdots,\ \mu_m^{(i)}=\mu_m^{(i')}=\mu_m$, 那末

$$\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_n}=\lambda_{j'_1}\lambda_{j'_2}\cdots\lambda_{j'_n}=\lambda_1^{\mu_1}\lambda_2^{\mu_2}\cdots\lambda_m^{\mu_m}.$$

上面 m^n 个項的和整理为 $\binom{m+n-1}{n}$ 項的和

$$\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_m=n}\lambda_1^{\mu_1}\cdots\lambda_m^{\mu_m}\varphi(S(\underbrace{u_1\otimes\cdots\otimes u_1}_{\mu_1\text{个}}\otimes\cdots\otimes\underbrace{u_m\otimes\cdots\otimes u_m}_{\mu_m\text{个}})).$$

这最后式子假如对于所有的 $\lambda_j\in\boldsymbol{C},\ j=1,\cdots,m$ 是 0, 显然

$$\forall i\,\varphi(S(u^{(i)}))=0❶.$$

引理 2 假定 $G=\mathfrak{S}_n$ 的盘 B 的垂直置换构成的群是 $\mathfrak{K}$, B 的 Young 的对称子是 c, 那末 $\rho(\hat{c})V^n$ 中元是关于 $\mathfrak{K}$ 的反对称張量。

証明 由 261 頁例 2, $\hat{c}=KH$. 因此，如果 $k\in\mathfrak{K},v\in V^n$, 那末

$$\rho(k)\rho(\hat{c})v=\rho(kKH)v=(\operatorname{sgn}k)\rho(KH)v=(\operatorname{sgn}k)\rho(\hat{c})v.$$

---

❶ 因为 $\varphi(S(\underbrace{u_1\otimes\cdots\otimes u_1}_{\mu_1\text{个}}\otimes\cdots\otimes\underbrace{u_m\otimes\cdots\otimes u_m}_{\mu_m\text{个}}))$ 都是常数，而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是 $\boldsymbol{C}$ 中任意数，所以

$$\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_m=n}\lambda_1^{\mu_1}\cdots\lambda_m^{\mu_m}\varphi(S(\underbrace{u_1\otimes\cdots\otimes u_1}_{\mu_1\text{个}}\otimes\cdots\otimes\underbrace{u_m\otimes\cdots\otimes u_m}_{\mu_m\text{个}})),$$

可以看成为 $\boldsymbol{C}$ 上 n 次 m 个变量的多項式，由多項式理論只有 $\varphi(S(u_1\otimes\cdots\otimes u_1\otimes\cdots\otimes u_m\otimes\cdots\otimes u_m))$ 全为零时，它才恒等于 0.——譯者注

所以 $\rho(\hat{c})v$ 是关于 $\mathfrak{R}$ 的反对称張量。　　　　(証毕)

$\mathfrak{L}(V^n)$ 中元对于上面固定的基底能够用 m^n 級方陣 $(\alpha^{(i)}_{(l)})=(\alpha^{j_1\cdots j_n}_{k_1\cdots k_n})$ 表示。$\alpha^{(i)}_{(l)}$ 表示它的第 i 行第 l 列的元素，V^n 的基底中第 i 个，第 l 个的元分别是 $u_{j_1}\otimes\cdots\otimes u_{j_n}$，$u_{k_1}\otimes\cdots\otimes u_{k_n}$ 时，$\alpha^{(i)}_{(l)}$ 也写成 $\alpha^{j_1\cdots j_n}_{k_1\cdots k_n}$。以下考虑 $\mathfrak{L}(V^n)$ 中元的矩陣表現时，常常自开始固定的基底来考虑，所以这事实不再一一声明。又把它的矩陣表現与 $\mathfrak{L}(V^n)$ 中元自身同样看待，而写成 $\mathfrak{L}(V^n)\ni v=(\alpha^{(i)}_{(l)})$。

例 5　$x\in G$ 时，表示 $\rho(x)$ 的矩陣是第 $x[i]$ 行，第 i 列 $(i=1,\cdots,m^n)$ 是 1，其他元素都是 0 的矩陣。即

$$\rho(x)=\sum_{i=1}^{m^n}E_{x[i],i}\,[1].$$

上面作了把 V^n 作为表現空間的 G 的表現 $\rho(x)$，由它把 $\mathfrak{L}(V^n)$ 作为表現空間的 G 的表現 $\tilde{\rho}(x)$ 可如下来定义。即 $\rho(x)$ 对于 V^n 的基底 $u^{(i)}$ 由 $\rho(x)u^{(i)}=u^{(x[i])}$ 来定义，对于 V^n 的一般元成为它的綫性扩張。$\mathfrak{L}(V^n)$ 有 m^{2n} 个基底 $E_{i,l}$，$\mathfrak{L}(V^n)$ 中一般元 $(\alpha^{(i)}_{(l)})$ (m^n 級矩陣) 能够写成 $\sum\alpha^{(i)}_{(l)}E_{i,l}$。于是 $\tilde{\rho}$ 对于 $E_{i,l}$ 定义为

$$\tilde{\rho}(x)E_{i,l}=E_{x[i],x[l]}\,[2],$$

对一般的元，作为它的綫性扩張。它給出 G 的表現是明显的。

$\mathfrak{L}(V^n)$ 中元 $\alpha^{(i)}_{(l)}$ 滿足 $\forall x\in G$, $\tilde{\rho}(x)(\alpha^{(i)}_{(l)})=(\alpha^{(i)}_{(l)})$ 的，即滿足

$$\forall x\in G,\ \forall i,\ l\quad \alpha^{(i)}_{(l)}=\alpha^{(x[i])}_{(x[l])}$$

的叫做**双对称**。假如 $\mathfrak{L}(V^n)$ 的元中双对称的全体用 $\tilde{S}^n$ 表示，由引理 1 即得下面引理。

---

[1] 由 $\rho(x)=\sum_{i=1}^{m^n}E_{x[i],i}$ 得知

$$\rho^{-1}(x)=\sum_{i=1}^{m^n}E_{i,x[i]}.\text{——譯者注}$$

[2] 这就是把 $\mathfrak{L}(V^n)$ 看成向量空間，$\tilde{\rho}(x)$ 是这向量空間的綫性变换。——譯者注

引理 3 $\tilde{S}^n$ 与 $\sigma^n(\mathfrak{G})$ $(\subset GL(V^n))$ 的綫性包絡一致[1]。

証明 在引理 1，如果把 V 用 $\mathfrak{L}(V)$ $(\cong V\otimes\hat{V})$ 替换（注意 $\mathfrak{L}(V^n))\cong(\mathfrak{L}(V))^n$）就得到 $\tilde{S}^n=[\sigma^n(\mathfrak{L}(V))]$。这右边由 264 頁命題 54 証明的后面得

$$[\sigma^n([\mathfrak{G}])]=[[\sigma^n(\mathfrak{G})]]=[\sigma(\mathfrak{G})].$$

引理 4 $\tilde{S}^n$ 与 Z 即 $\mathfrak{C}(\rho(G))$ 一致[2]。

証明 一般，假如 $GL(V^n)\ni v=(\alpha_{(l)}^{(i)})$，由例 3 得

$$\rho(x)\cdot(\alpha_{(l)}^{(i)})=(\alpha_{(l)}^{(x^{-1}[i])}),\quad(\alpha_{(l)}^{(i)})\cdot\rho(x)=(\alpha_{(x[l])}^{(i)}).$$

但
$$\alpha_{(l)}^{(x^{-1}[i])}=\alpha_{(x[l])}^{(i)}\Leftrightarrow\alpha_{(l)}^{(i)}=\alpha_{(l)}^{(x^{-1}[x[i]])}=\alpha_{(x[l])}^{(x[i])},$$

因此 $v\in Z\Leftrightarrow v\in\tilde{S}^n$。所以 $\tilde{S}^n=Z$。（証毕）

由引理 3，4（把 $\tilde{S}^n$ 作为媒介），因为 $Z=[\sigma^n(\mathfrak{G})]$，于是命題 55 得証。把以上作为准备，卽得我們的目标关于 $\mathfrak{G}$ 的表現 σ^n 的定理 34。

---

[1] 在这引理中 $\tilde{S}^n$，$\sigma^n(\mathfrak{G})$ 都是看成为向量空間 $\mathfrak{L}(V^n)$ 中的向量。为了与引理 1 比較，可参考下面的对应。

引理 1:	V^n	S^n	$\rho(x)$	$\underbrace{u\otimes\cdots\otimes u}_{n\text{ 个}}$	$u\in V$
	↓	↓	↓	↓	
引理 3:	$\mathfrak{L}(V^n)=(\mathfrak{L}(V))^n$	$\tilde{S}^n$	$\tilde{\rho}(x)$	$\underbrace{A\otimes\cdots\otimes A}_{n\text{ 个}}$	$A\in\mathfrak{L}(V)$

在引理 1 中对于任意 $u\in V$，集合 $\{u\otimes\cdots\otimes u\}$ 中每个元显然对 $\rho(x)$ $(x\in S_n)$ 不变，因此它含于 S^n。然后再証明它的綫性包絡和 S^n 的綫性包絡相等。

在引理 3 中对于任意 $A\in\mathfrak{L}(V)$，集合 $\{A\otimes\cdots\otimes A\}$ 就是 $\sigma^n(\mathfrak{G})$，而它的每一元 z，$z=\underbrace{A\otimes\cdots\otimes A}_{n\text{ 个}}$，如果 $A=(\alpha_k^j)$ $(j,k=1,2,\cdots,n)$，那末矩陣 z 中的元一般是 $\alpha_{k_1}^{j_1}\alpha_{k_2}^{j_2}\cdots\alpha_{k_n}^{j_n}$，記为 $\alpha_{(l)}^{(i)}$ $(i)=(j_1\cdots j_n)$，$l=(k_1\cdots k_n)$，于是对于任意 $x\in S_n$，显然 $\alpha_{x[l]}^{x[i]}=\alpha_{(l)}^{(i)}$。所以向量 $z=(\alpha_{(l)}^{(i)})$ 含于 $\tilde{S}^n$。同样可証明 $\sigma^n(\mathfrak{G})$ 也含于 $\tilde{S}^n$。因此用引理 1 的同样証法可以証明 $\tilde{S}^n$ 与 $\sigma^n(\mathfrak{G})$ 的綫性包絡一致。——譯者注

[2] 在这引理中是将 $\tilde{S}^n$，$\sigma^n(\mathfrak{G})$，$\rho(x)$ 看成为向量空間 V^n 上的綫性变换。——譯者注

定理 34　(1) 假定 V 是把 $\boldsymbol{C}$ 作为基础体的 m 維向量空間，$\mathfrak{G}=GL(V)$ 的自然表現是 σ，那末把 V^n 作为表現空間的 $\mathfrak{G}$ 的表現 σ^n 是完全可約的。

(2) 假如 n 阶对称群 $G=\mathfrak{S}_n$ 把 V^n 作为表現空間的表現 ρ 由 (43.1) 定义，那末 σ^n 的既約子表現的表現空間的全体，如果对应于行数是小于或等于 m 的 G 的盘 B 的 Young 的对称子是 c_B 时，与 $\rho(\hat{c}_B)V^n$ 的全体一致。

(3) 为了 $\rho(\hat{c}_{B_1})V^n\sim\rho(\hat{c}_{B_2})V^n$，要且只要盘 B_1, B_2 是属于同一台。

(4) ((3)的意义) 对应于台 D 的既約表現的重复度等于属于台 D 的标准盘的个数 d_D。

証明　(1)在 272 頁中已經証明。

在(2)，假如 B 的行数是 r，那末只証明 $r>m$ 时，$\rho(\hat{c}_B)V^n=\{0\}$，$r\leqq m$ 时，$\rho(\hat{c}_B)V^n\neq\{0\}$ 即可。

由引理 2，$\rho(\hat{c}_B)V^n$ 中元关于 $\mathfrak{K}(B)$ 是反对称張量。因此关于 B 的第一列中元的垂直置換全体又是反对称張量。第一列的垂直置換全体构成 r 阶对称群，假如 $r>m$，那末由例 4 反对称張量只是 0。

假如 $r\leqq m$，B 所属的台是 $D(m_1, \cdots, m_r)$ 时，如果

$$V^n\ni v=\underbrace{u_1\otimes\cdots\otimes u_1}_{m_1\text{个}}\otimes\underbrace{u_2\otimes\cdots\otimes u_2}_{m_2\text{个}}\otimes\cdots\otimes\underbrace{u_r\otimes\cdots\otimes u_r}_{m_r\text{个}},$$

那末 $\rho(\hat{c}_B)V^n\ni\rho(\hat{c}_B)v\neq 0$。实际上，

$$\rho(\hat{c}_B)v=\rho(K_B)\rho(H_B)v=[\mathfrak{H}(B):1]\rho(K_B)v,$$

$$\rho(K_B)v=\sum_{k\in\mathfrak{K}(B)}(\operatorname{sgn}k)\rho(k)v\neq 0.$$

(3) 由定理 30 与定理 33 自明。

(4) 因为由前节引理 1，$^hV^n$ 是两側理想，所以能够唯一的分解为 A 的最小两側理想的直和

$$^{\natural}V^n = A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(q)}.$$

$A^{(i)}(i=1, \cdots, q)$ 能够分解为等于属于对应于它的台 $D^{(i)}$ 的标准盘的个数的既約左理想的直和。由这事实与定理 33 (Weyl 的相互律) (4) 是明显的。 (証毕)

注意 1 在上面，只考察了 $A(G)$ 的左理想，即令考察右理想也能够得到与上同样的結果。这时在对应于定理 34 的定理中，用 c_B 代替 $\hat{c}_B$ 即可。

注意 2 关于对应于台 $D=D(m_1, \cdots, m_r)$ 的 $\mathfrak{G}$ 的既約表現的級数 $\tilde{d}_D$ 下面公式是熟知的 (Weyl)。当 $r<m$ 时，命 $m_{r+1}=\cdots=m_m=0$，設

$$l_i = m_i + m - i \quad (i=1, 2, \cdots, m),$$

$$\Delta(x_1, \cdots, x_m) = \prod_{i<j}(x_i - x_j),$$

则

$$\tilde{d}_D = \frac{\Delta(l_1, l_2, \cdots, l_m)}{\Delta(m-1, m-2, \cdots, 0)}^{❶}.$$

以上 $\mathfrak{G}$ 完全是从代数上来討論，但若視 $\mathfrak{G}$ 为拓扑群，并且是李 (Lie) 群，就要考虑 $\mathfrak{G}$ 的李环。关于上面 $\mathfrak{G}$ 的表現的結果，自李环論的立場也有意义，但这让于本丛书中《李群論》一书。又明显的与上类似的結果不仅 $\mathfrak{G}=GL(V)$，关于 $\mathfrak{G}$ 的各种子群——所謂綫性群，例如酉群，旋轉群等——也成立，对称群的表現論也能够利用这些群的表現論。因为这已經远超过預定的篇幅，关于这等的詳細討論，在这里不得不割爱。在本丛书有关群論应用的书中这等事实将会触及。

作为参考书，一般关于代数，在 §2 曾举出的 van der Waerden 的书在今天仍是标准的著作之一。但关于对偶空間和張量积等沒有象本书那样的处理。关于綫性代数方面其詳有 N. Bourbaki 的

❶ 参考 H. Weyl: The Classical Groups (1939), Chapter VII. 5. ——譯者注

綫性代数 (Algèbre Linéaire)，多重綫性代数 (Algèbre Multi-linéaire) 两分册。

关于群的表現論有 H. Weyl 古典的"群論与量子力学"(有內山氏日譯本)。关于 § 42 的內容也同样出現于 Weyl 的古典群論 (Classical Groups)。但敘述得不容易理解。van der Waerden 的量子力学中的群論方法 (Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik (1932)) 有更詳解說。H. Boerner 的群表示論 (Darstellungen von Gruppen (1955)) 引入新的結果，其闡述就清楚多了。

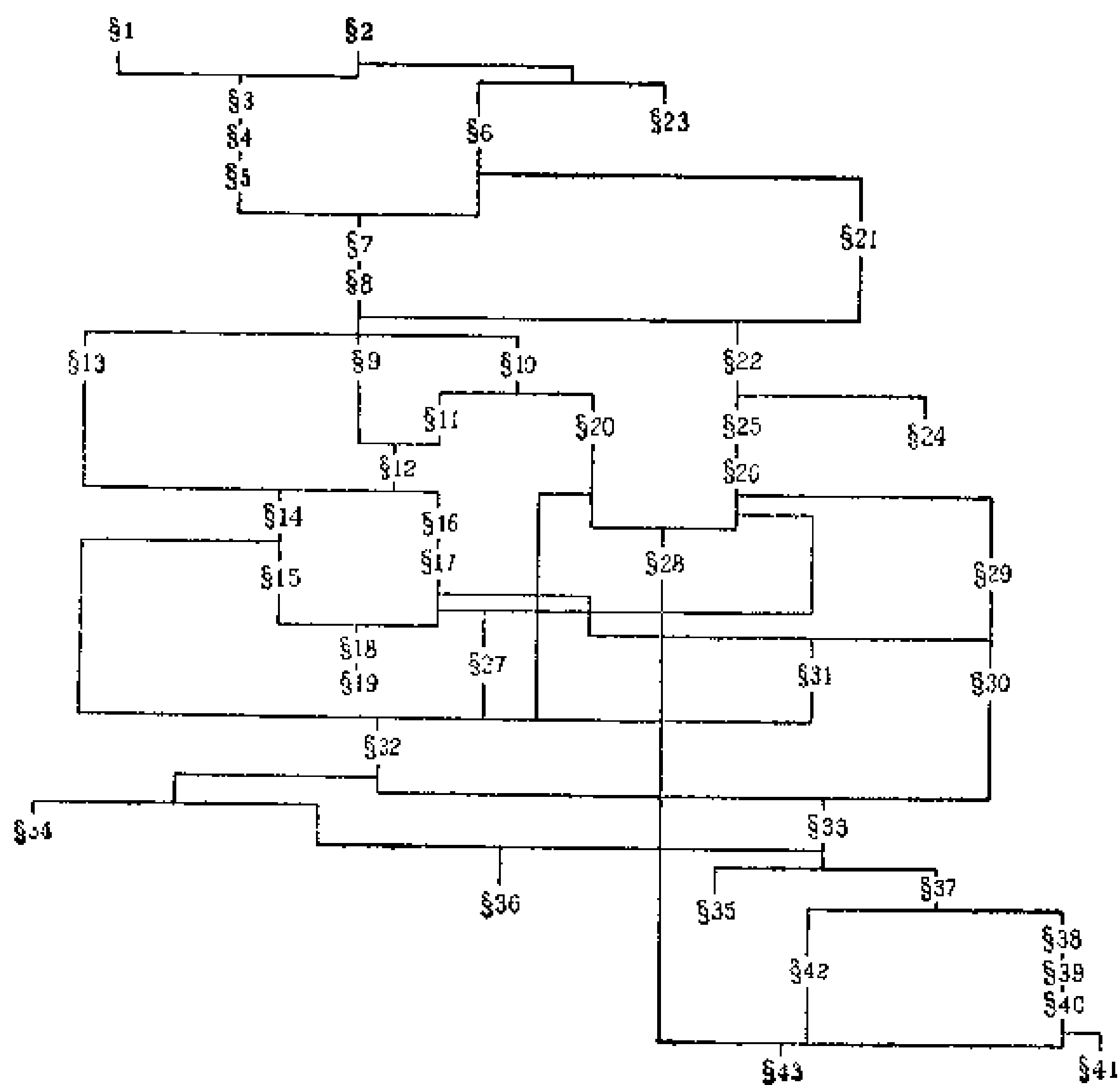
最后就本书执笔的責任說一言。在本册不采取依照章节执笔的方針。最初两个笔者討論全部的結构，杉浦就全体作出第1次原稿，弥永把它整理，因此关于錯誤遺漏的責任弥永不得不多担負些。时間不充裕，整理不充分，加之在前两章上又出現了明显錯排❶。这回明显的遺漏恐也不免，希望讀者指正。

又在整理阶段，布川正巳君誊清原稿并提供許多宝貴意見，因此得到改善的地方不少。謹記感謝之意。

---

❶ 翻譯时已予校正。——譯者注

为便利讀者，把各节之間的邏輯关系列成图表如下：



附录　有限旋轉群*

3 維 Euclid 空間中剛体运动一般由平移及旋轉結合而成，且我們在几何中很容易証明使空間中一点 O 不动的剛体运动一定是一旋轉。因此(均以 O 点不动，下同)两旋轉的乘积及一旋轉的逆皆仍为旋轉，故所有旋轉成一群。下面研究此群的具有**若干种不同构造的有限子群**。

今以 O 点为中心作一单位球面 $\mathfrak{K}$，每一旋轉决定 $\mathfrak{K}$ 自身上的点与点間的一个一一对应，且决无两不同的旋轉决定 $\mathfrak{K}$ 上相同的对应，故要研究所有的旋轉只要研究 $\mathfrak{K}$ 上如此的对应——我們仍叫它做旋轉——好了。

以后 $\mathfrak{K}$ 上的点用大写拉丁字母表示，$\mathfrak{K}$ 上的旋轉用小写的希腊字母表示。

空間一旋轉若非不动运动(以 $\boldsymbol{1}$ 表示)就使通过 O 点的某一直綫上每一点不动，因此 $\mathfrak{K}$ 上任一旋轉 σ 若 $\neq \boldsymbol{1}$，必使 $\mathfrak{K}$ 上两直徑对頂点 P, P' 不动。此两点称为 σ 的极，如 P 已定，它的直徑对頂点 P' 也唯一决定。故任一旋轉如以 P 为极，則亦非以 P' 为极不可。

我們都知道对一旋轉 σ，必有一"旋轉角" $\varphi_\sigma (0 \leqslant \varphi_\sigma < 2\pi)$ 与它对应。若 σ, τ 有相同的极，則

$$\varphi_{\sigma\tau} \equiv \varphi_\sigma + \varphi_\tau \pmod{2\pi}. \tag{1}$$

以上皆为旋轉的基本性质。我們現在假定 $\mathfrak{G}$ 是 $\mathfrak{K}$ 的一有限子群，含有 $N (>1)$ 个 $\mathfrak{K}$ 上的旋轉，有限群的存在是不成問題的。

---

* 1951 年武汉大学数学系代数教学小組在四年級集体开"群論"进修課，用 H. Zassenhaus 著 Lehrbuch der Gruppentheorie 为教本，該书叙述过簡，論証亦不詳，教学双方，均感困难，因此小組着手根据該书編譯，由各主讲人执笔，此文系路見可同志根据該书第 1 章 § 6 編譯的。

我們想知道 $\mathfrak{G}$ 有几种不同的构造，必須先了解与它有关的几个基本性质。

球面上已知两定点 P, Q, 如 $\mathfrak{G}$ 中有一 σ 存在使 $\sigma P=Q$，則称 P 与 Q (关于 $\mathfrak{G}$) 为共軛的。立刻可以看到共軛关系是等价关系，故球面上的点分成了若干共軛类。我們如只考虑所有 $\mathfrak{G}$ 中旋轉的极所成的(有限)集合，則它也因此分成有限个共軛类：

$$\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{P}_H.$$

每一类 $\mathfrak{P}_i$ 中的 p_i 个极都是共軛的，且不同类中的极也不共軛。

在 $\mathfrak{G}$ 中任取一旋轉的极 P，則 P 必属于上述某一类。設

$$P\in\mathfrak{P}_i=\mathfrak{P},$$

$\mathfrak{P}$ 中連 P 在內共有 $p=p_i$ 个极 P_1, P_2, $\cdots$, P_p(其中有一个就是 P)。今考虑 $\mathfrak{G}$ 中所有使 P 不动的旋轉 (即以 P 为极的旋轉加上 $\boldsymbol{1}$)，这些旋轉形成一群 $\mathfrak{g}_P\subseteq\mathfrak{G}$。因为每一 P_j($j=1$, $\cdots$, p)与 P 共軛，故有一 $\sigma_j\in\mathfrak{G}$ 存在，使

$$\sigma_jP=P_j\quad(j=1,\ \cdots,\ p).$$

对 $\mathfrak{G}$ 的任一旋轉 σ，因 σP 与 P 共軛，故必对某一 k($1\leqslant k\leqslant p$)，

$$\sigma P=P_k=\sigma_kP,$$

因此

$$\sigma_k^{-1}\sigma P=\boldsymbol{1}P=P,$$

即 $\sigma_k^{-1}\sigma\in\mathfrak{g}_P$ 或 $\sigma\in\sigma_k\mathfrak{g}_P$。故所有 $\mathfrak{G}$ 的元自 $\mathfrak{g}_P$ 出发分成 p 个右剩余类：

$$\mathfrak{G}=\{\sigma,\ \mathfrak{g}_P,\ \sigma_2\mathfrak{g}_P,\ \cdots,\ \sigma_p\mathfrak{g}_P\}.$$

这些剩余类由 p 完全决定。$\mathfrak{g}_P$ 本身亦为剩余类之一，每一剩余类含有

$$n=\frac{N}{p}\quad(\text{一般 } n_i=\frac{N}{p_i},\ i=1,\ \cdots,\ H)\tag{2}$$

个元。P 点称作 $\mathfrak{G}$ 中的一个 n 回极，因为 n 由 N 与 p 决定，所以 $\mathfrak{P}$ 中每一点都是 n 回极。且由此可見若 σ 以 P (n 回极)为极，則

必 $\sigma^n=I$；因 $\sigma\in\mathfrak{g}_P$ 而 $\mathfrak{g}_P$ 既将 $\mathfrak{G}$ 分成 p 个右剩余类，它的級（元数）非是 n 不可。注意 n 必須大于 1，因若 $n=1$ 則 $\mathfrak{g}_P=I$，P 便不是极了。

設 τ 是 $\mathfrak{G}$ 中任一元。我們已見由 P 得导出 $\mathfrak{g}_P$，現在問由 τP 导出的 $\mathfrak{g}_{\tau P}$ 是什么？τP 既与 P 共軛，故亦为一 n 回极，因此 $\mathfrak{g}_{\tau P}$ 的級也是 n。但这我們还嫌不够，今将証明

$$\mathfrak{g}_{\tau P}=\tau\mathfrak{g}_P\tau^{-1}. \tag{3}$$

設 $\sigma_1\in\mathfrak{g}_{\tau P}$，即 $\sigma_1\tau P=\tau P$，故 $\tau^{-1}\sigma_1\tau P=P$，因之 $\tau^{-1}\sigma_1\tau\in\mathfrak{g}_P$，或 $\sigma_1\in\tau\mathfrak{g}_P\tau^{-1}$。所以 $\mathfrak{g}_{\tau P}\subseteq\tau\mathfrak{g}_P\tau^{-1}$。

反之，設 $\sigma\in\mathfrak{g}_P$ 即 $\sigma P=P$，故 $\tau\sigma\tau^{-1}(\tau P)=\tau P$，或 $\tau\sigma\tau^{-1}\in\mathfrak{g}_{\tau P}$，所以 $\tau\mathfrak{g}_P\tau^{-1}\subseteq\mathfrak{g}_{\tau P}$。(3)告成立。

用群論的术語言，$\sigma_1=\tau\sigma\tau^{-1}$ 与 σ 互为共軛；$\mathfrak{g}_{\tau P}$ 与 $\mathfrak{g}_P$ 互相共軛。故(3)的意义是：由共軛的极导出 $\mathfrak{G}$ 的共軛子群。

今研究 $\mathfrak{G}$ 中旋轉数(N)与极的总数間有怎样的关系？

任一使 n 回极 P 不动的旋轉有 n 个，其中有一个为 I，故 $\neq I$ 的有 $n-1$ 个，即以 P 为极的有 $n-1$ 个。故在 $\mathfrak{P}$ 类中以任一点为极的旋轉($\neq I$)共有 $p(n-1)$ 个；因为任一与 P 共軛的极 Q 也是 n 回极，而以 Q 为极的旋轉($\neq I$)也有 $n-1$ 个。故 $\mathfrak{G}$ 中极的总数有

$$\sum_{i=1}^{H}p_i(n-1)$$

个。但如有若干个旋轉以同一点为极，該极仍計算为若干次，不合并。另一方面，$\mathfrak{G}$ 中共有 $N-1$ 个 $\neq I$ 的旋轉，每一旋轉有两极，故

$$2(N-1)=\sum_{i=1}^{H}p_i(n_i-1).$$

两边以 N 除之，注意 $N=p_in_i$，得

$$2\left(1-\frac{1}{N}\right)=\sum_{i=1}^{H}\left(1-\frac{1}{n_i}\right). \tag{4}$$

因 $N>1$，故

$$2>2\left(1-\frac{1}{N}\right)\geqslant 1. \tag{5}$$

又因 $n_i\geqslant 2$，故

$$1>1-\frac{1}{n_i}\geqslant\frac{1}{2},$$

$$H>\sum_{i=1}^{H}\left(1-\frac{1}{n_i}\right)\geqslant\frac{H}{2}. \tag{6}$$

欲(4)成立，因(5)的关系，由(6)知 $H=2$ 或 3。

I. 若 $H=2$，即

$$\frac{2}{N}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2},$$

但因

$$2\leqslant n_i\leqslant N, \tag{7}$$

故非 $n_1=n_2=N$ 不可。

II. 若 $H=3$，则

$$\frac{2}{N}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}-1. \tag{8}$$

令 $n_1\leqslant n_2\leqslant n_3$，即 $1/n_1\geqslant 1/n_2\geqslant 1/n_3$。若 $n_1\geqslant 3$，则

$$1/n_1\leqslant 1/3,$$

故(8)式右边为負数，不可能；故必 $n_1=2$，因之(8)成为

$$\frac{2}{N}=\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}-\frac{1}{2}. \tag{8'}$$

如 $n_2>4$，则 $1/n_2$，$1/n_3$ 均 $<1/4$，(8′)右边又为負数，不可能；故 $n_2\leqslant 3$。因此又可分成下列数种情形：

a) $n_2=2$，则 $n_3=\dfrac{N}{2}$，

b) $n_2=n_3=3$, 則 $N=12$,

c) $n_2=3$, $n_3=4$, 則 $N=24$,

d) $n_2=3$, $n_3=5$, 則 $N=60$,

e) $n_2=3$, $n_3\geqslant 6$, 則(8')右边又为負数,又不可能。

今分述在上列諸情形下 $\mathfrak{G}$ 的构造形式。

I. $H=2$, $n_1=n_2=N(>1)$.

此时 $\mathfrak{P}_1$ 及 $\mathfrak{P}_2$ 中各含一个极,各与自已共軛。故 $\mathfrak{G}$ 中所有旋轉 ($\neq I$) 有相同的两极。設 $\mathfrak{G}$ 中有最小正旋轉角的旋轉为 σ, 其旋轉角为 $\varphi_\sigma(>0)$. $\mathfrak{G}$ 中任一旋轉 τ 如有旋轉角 φ_τ, 則必有一整数 m 存在,使

$$m\varphi_\sigma\leqslant\varphi_\tau\leqslant(m+1)\varphi_\sigma,$$

但因 $\varphi_{\sigma^{-1}}=-\varphi_\sigma$, $\varphi_{\sigma^m}=m\varphi_\sigma$, 故

$$0\leqslant\varphi_{\sigma^{-m}\tau}<\varphi_\sigma.$$

φ_σ 既为最小正旋轉角,故 $\varphi_{\sigma^{-m}\tau}=0$, 即 $\varphi_\tau=\varphi_{\sigma^m}$ 或 $\tau=\sigma^m$ (参看(1))。故此时 $\mathfrak{G}$ 为一 N 阶的循环群,以 Z_N 表示。

由这一类旋轉群的分析可得下列几条重要的結果:

1° 由 P 为一 n 回极,則 $\mathfrak{G}$ 中凡使 P 不动的旋轉形成的群 $\mathfrak{g}_P$ (已見其有 n 个元)为一 n 阶循环群。因 $\mathfrak{g}_P$ 本身也是一有限群,它必属上述諸形之一,但 $\mathfrak{g}_P$ 中一切旋轉使 P 不动,故 P 与自身共軛,即 P 所属的共軛类 $\mathfrak{P}_1$ 只有 $p_1=1$ 个元,故 $n_1=n/1=n=\mathfrak{g}_P$ 的元数。上列諸款中只有 I 可能有这样的情形 [II. a) 中 $N\neq 2$, 因否則 $n_3=1$ 了]。

故 $\mathfrak{g}_P$ 为一 n 阶循环群。

2° 若 σ, τ 为 $\mathfrak{G}$ 中以 P 为极的两旋轉,則必以同样另一点 P' 为极; P' 称为 P 的直徑对頂点(几何的看法見前)。

因由 σ, τ 可生成一有限循环群,又必須为 I 的样子; Z_m, 而 $n_1=n_2=M$, Z_m 中仅有两极,故除 P 外只有一个极了。

3° $\mathfrak{G}$ 中一对直徑对頂极点 P, P' 的回数相同——显然。

4° 若 P, P'; Q, Q' 为两对直徑对頂极点，且 $\mathfrak{G}$ 中有一 τ 使 $\tau P=Q$, 則必 $\tau P'=Q'$.

設 $\mathfrak{G}$ 中旋轉 σ 以 P, P' 为极，ρ 以 Q, Q' 为极，則

$$\tau\sigma\tau^{-1}Q=Q,$$

即 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 的极为 Q, 故由 2°, 亦以 Q' 为极：

$$\tau\sigma\tau^{-1}Q'=Q',$$

或
$$\sigma(\tau^{-1}Q')=\tau^{-1}Q',$$

故 σ 以 $\tau^{-1}Q'$ 为极。但显然 $\tau^{-1}Q'\neq P$, 故 $\tau^{-1}Q'=P'$ 即 $\tau P'=Q'$.

有了这些性质再研究 II 的情形，就方便得多了。

II$_a$. $H=3$, $n_1=n_2=2$, $n_3=N/2$ $(N>2)$.

$\mathfrak{P}_3$ 中有两个 $N/2$ 回极 P, P' 互为共軛。以 P 为极的旋轉必使 P 不动，但 P' 为唯一与 P 共軛的极，故 P' 亦不动。即 P' 非为 P 的直徑对頂点不可。故 $\mathfrak{g}_P=\mathfrak{g}_{P'}=\mathfrak{g}$. 因此 $\mathfrak{G}$ 可分成两个右剩余类（因 $p=2$）

$$\mathfrak{G}=\{\mathfrak{g},\ \tau\mathfrak{g}\},$$

其中 $\tau\notin\mathfrak{g}$, 我們将 τ 取定不再更改。

因 P, P' 为 $\mathfrak{P}_3$ 中仅有的两共軛极，故 $\mathfrak{G}$ 中任一旋轉或使 P', P 不动，或使它們互換。若 $\sigma\notin\mathfrak{G}$, 則必 $\sigma P=P'$, $\sigma P'=P$, 故 $\sigma^2P=P$, 因此 $\sigma^2=\boldsymbol{1}$（因 σ 有极，故 σ^2 亦使此两极不动，今又使 P 不动，故 $\sigma^2=1$. 此一推理法以下常用）。τ 既不属于 $\mathfrak{g}$, 故 $\tau^2=\boldsymbol{1}$. 对任一 $\sigma\in\mathfrak{g}$. 亦必 $(\tau\sigma)^2=\boldsymbol{1}$. 故

$$\tau\sigma=(\tau\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\tau^{-1}=\sigma^{-1}\tau. \tag{9}$$

$\mathfrak{G}$ 由 $\mathfrak{g}$ 及 $\tau\mathfrak{g}$ 构成，$\mathfrak{g}$ 由 1° 为 $-N/2$ 阶循环群，$\mathfrak{g}$ 中两元的乘积自然很容易决定。設 $\mathfrak{g}$ 的元写成 σ_1, σ_2, $\cdots$, 則 $\tau\mathfrak{g}$ 的元为

$$\rho_1=\tau\sigma_1,\ \rho_2=\tau\sigma_2,\ \cdots,$$

但
$$\rho_i\sigma_j=(\tau\sigma_i)\sigma_j=\tau(\sigma_i\sigma_j).$$

又由(9)式

$$\sigma_i\rho_j=\sigma_i(\tau\sigma_j)=(\sigma_i\tau)\sigma_j=\tau(\sigma_i^{-1}\sigma_j),$$

$$\rho_i\rho_j=(\tau\sigma_i)(\tau\sigma_j)=\tau(\sigma_i\tau)\sigma_j=\tau^2\sigma_i^{-1}\sigma_j=\sigma_i^{-1}\sigma_j.$$

故 $\mathfrak{G}$ 中任意两元的积可写成 σ_k 或 ρ_k 的样子。因此 $\mathfrak{G}$ 的群表(乘法表)完全可写出，亦即 $\mathfrak{G}$ 的构造完全决定。这种 $\mathfrak{G}$ 以 D_N 表示，叫做**两面体群**(几何意义見后，以下同)。

II_b. $H=3$, $n_1=2$, $n_2=n_3=3$, $N=12$.

$\mathfrak{P}_3$ 中含有四个共軛 3 回极 A, B, C, D. $\mathfrak{G}$ 中任一旋轉将此四极点互换，故可使 $\mathfrak{G}$ 中任一旋轉 σ 与 A, B, C, D 所成的置换群 $\mathfrak{S}_4$ 中某一元对应。

$\mathfrak{G}$ 中决无 σ 与 $\mathfrak{S}_4$ 中如 $(A\,B\,C\,D)$ 形者对应(即 $\sigma A=B$, $\sigma B=C,\cdots$)，因否則 σ 的极将为 4 回极了，但 $\mathfrak{G}$ 中无这种极，$\mathfrak{G}$ 中亦无 σ 与如 $(A\,B)(C)(D)$ 形者对应，因否則 σ 以 C, D 为极且 $\sigma^2=\boldsymbol{1}$ 故 C, D 将为 2 回极，故 $\mathfrak{G}$ 中旋轉的对应元在交代群 $\mathfrak{A}_4$ 內。

上述对应虽然使旋轉的乘积对应于置换的乘积，逆对应于逆，因此这种对应实为一同态。又 $\sigma\neq\boldsymbol{1}$ 决不可能使 A, B, C, D 都不动，即只有 $\boldsymbol{1}$ 对应于不动置换，因此不同的旋轉对应于不同的置换。

$\mathfrak{A}_4$ 有 12 个置换而 $\mathfrak{G}$ 亦有 12 个旋轉，故 $\mathfrak{G}$ 与 $\mathfrak{A}_4$ 的构造同。即 $\mathfrak{G}\cong\mathfrak{A}_4$. 此时 $\mathfrak{G}$ 称为**四面体群**。

II_c. $H=3$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=4$, $N=24$.

考虑 $\mathfrak{P}_2$ 中的八个 3 回极，因其他共軛类中无 3 回极，故此八点为四对直徑对頂点：

$$a:\ A, A';\quad b:\ B, B';\quad c:\ C, C';\quad d:\ D, D'.$$

$\mathfrak{G}$ 中任一旋轉 σ 必使此四对頂点对与对間互換(由 4°)，例如 σ 使 $(abc)(d)$，意即 $\sigma a=b$, $\sigma b=c$, $\sigma c=a$, $\sigma d=d$, 但 σA 可能为 B 亦可能为 B' 及 σD 可能为 D 亦可能为 D'.

今将証明若 $\sigma\in\mathfrak{G}$ 使 $(a)(b)(c)(d)$，則必 $\sigma=\boldsymbol{1}$. 因若 $\sigma\neq\boldsymbol{1}$

且使$(a)(b)(c)(d)$，則σ不可能使两对或两对以上的頂点都不动，故σ只有两种可能的样子：

1) σ 使$(AA')(BB')(CC')(D)(D')$，

2) σ 使$(AA')(BB')(CC')(DD')$.

若σ为属于1)的样子，卽D, D'为它的极，但$\sigma^2=\boldsymbol{1}$，故D, D'将为2回极，与所設相反。

若σ属于2)的样子，則任取一$\tau(\neq \boldsymbol{1})\in\mathfrak{G}$，則$\tau A$, $\tau A'$必为a, b, c, d中某一对极，但

$$\tau\sigma\tau^{-1}(\tau A)=\tau A',\quad \tau\sigma\tau^{-1}(\tau A')=\tau A,$$

卽$\tau\sigma\tau^{-1}$亦为互換τA, $\tau A'$，同样它亦互換τB, $\tau B'$等，所以$\tau\sigma\tau^{-1}$与σ有同样的性质，而$\sigma\tau\sigma\tau^{-1}$使此八极皆不动，故

$$\sigma\tau\sigma\tau^{-1}=\boldsymbol{1},$$

或

$$\tau=\sigma\tau\sigma.$$

τ既为任意，今取以A, A'为极的一旋轉τ，則$\sigma\tau$将A, A'互換，故又有$\sigma\tau\sigma\tau=\boldsymbol{1}$或$\tau^{-1}=\sigma\tau\sigma$，与前一結果相較，得$\tau=\tau^{-1}$或$\tau^2=\boldsymbol{1}$，因此$A$, A'为2回极亦与所設相反，所以σ非为$\boldsymbol{1}$不可。

若σ_1, σ_2为$\mathfrak{G}$中两旋轉皆使a, b, c, d有同样的置換，因此$\sigma_1\sigma_2^{-1}$就使$(a)(b)(c)(d)$，故必$\sigma_1\sigma_2^{-1}=\boldsymbol{1}$，或$\sigma_1=\sigma_2$.

于是$\mathfrak{G}$中任一旋轉必与a, b, c, d間一个置換对应，且不同旋轉对应于不同置換，而$\mathfrak{G}$与$\mathfrak{S}_4$皆含有24个元。同II_b之理，必$\mathfrak{G}\cong\mathfrak{S}_4$. 这种$\mathfrak{G}$称为（**六面体**或）**八面体群**。

II_d. $H=3$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=5$, $N=60$.

考慮$\mathfrak{P}_1$中30个2回极，以同上的理由共成十五对直徑对頂点。

設p: P, P'为其中一对，以P, P'为极的旋轉只有一个$\sigma(\neq\boldsymbol{1})$，当然$\sigma^2=\boldsymbol{1}$，又因$P$,$P'$共軛，故必有一$\tau$存在，使$\tau P=P'$,

因此 $\tau P'=P$；也有 $\tau^2=\boldsymbol{1}$，今証下列諸性質：

1. $\mathfrak{G}$ 中使(p)不变（即使 P, P' 不动或彼此互换）的旋轉只有 σ, τ, $\rho=\sigma\tau$, $\boldsymbol{1}$ 四个。

2. $\mathfrak{G}$ 中与 σ 交换可能的旋轉亦仅有 σ, τ, ρ, $\boldsymbol{1}$ 四个。

3. 設 τ 的极为 $q:Q$, Q'；ρ 的极为 $r:R$, R'；則 $\mathfrak{G}$ 中使(q)不变或使(r)不变的旋轉仍是此四个。因之任一旋轉如使(p), (q), (r)三对中一对不变亦必使其他两对不变。

4. 若此三对极所成的集合叫做 $\mathfrak{p}$，則 $\mathfrak{G}$ 中使 $\mathfrak{p}$ 不变的两級旋轉必以三对中某一对为极。

設 $\alpha\in\mathfrak{G}$ 使(p)不变，故

$$\alpha P=P \quad 或 \quad \alpha P=P'.$$

若 $\alpha P=P$，因为以 P 为极的旋轉只有 σ，故 $\alpha=\boldsymbol{1}$ 或 $\alpha=\sigma$。若 $\alpha P=P'$，則 $\alpha\tau^{-1}P=P$。同理故 $\sigma\tau^{-1}=\boldsymbol{1}$，即 $\alpha=\tau$ 或 $\alpha\tau^{-1}=\sigma$ 即 $\alpha=\sigma\tau=\rho$。故 1 成立。

因 ρ 亦将 P, P' 互换，故亦 $\rho^2=\boldsymbol{1}$，即

$$\sigma\tau\sigma\tau=\boldsymbol{1} \quad 或 \quad \sigma\tau=(\sigma\tau)^{-1}=\tau^{-1}\sigma^{-1}=\tau\sigma.$$

故 σ 与 τ 交换可能，同理 σ, τ, ρ 皆互相交换可能。今若 $\alpha\in\mathfrak{G}$ 与 σ 交换可能，即 $\alpha\sigma=\sigma\alpha$，故 $\sigma\alpha P=\alpha\sigma P=\alpha P$，所以 αP 不动。故 αP 为 P 或 P'，即 α 使(p)不变，由 1.，α 只有这几种可能，故 2. 成立。

$\mathfrak{G}$ 中使 q 不变的旋轉也应有四个，且此四个为与 τ 唯一交换可能的，而 σ, τ, ρ, $\boldsymbol{1}$ 易見均与 τ 交换可能，故此四个也非是它們不可。同理对 ρ 也是如此。故 3. 成立。

設 α 为 $\mathfrak{G}$ 中一两級旋轉($\alpha\neq\boldsymbol{1}$, $\alpha^2=\boldsymbol{1}$) 使(p)不变。由 4°，α 必使 p, q, r 三对頂点互换。α 决不可使它們輪换如 (pqr)，因否則 $\alpha^2\neq\boldsymbol{1}$ 了，故 α 必至少使一对例如(p)不变。但使(p)不变的旋轉由 1. 必为 σ, τ 或 ρ；而此三旋轉分别以此三对点为极。故 4.

亦成立。

G 中的 30 个 2 回极因 3. 的緣故，可以上述的方法分組，每 6 个一組共有 5 組：

$$\mathfrak{p}_i=\{p_i: P_i, P_i';\ q_i: Q_i, Q_i';\ r_i: R_i, R_i'\} \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

設以 p_i, q_i, r_i 为极的 2 回极旋轉分別为 σ_i, τ_i, ρ_i.

$\mathfrak{G}$ 中任一旋轉 α 必將整个一組 $\mathfrak{p}_i$ 变成另一組 $\mathfrak{p}_j$，因此每一 α 对应于諸 $\mathfrak{p}_i$ 間的一置換，卽 $\mathfrak{S}_5$ 的一元。 因由 4°, αP_i, $\alpha P_i'$; αQ_i, $\alpha Q_i'$; αR_i, $\alpha R_i'$ 仍为此十五对中某三对直徑对頂 2 回极点，且易見 $\alpha\sigma_i\alpha^{-1}$, $\alpha\tau_i\alpha^{-1}$, $\alpha\rho_i\alpha^{-1}$ 分別以此三对为极，而它們間也彼此可以交換可能，且各不同并异于 $\boldsymbol{I}$；故由性质 2，它們一定分別是某一組 σ_j, τ_j, ρ_j（次序可顛倒），亦卽：

$$\alpha\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}_j.$$

考慮 $\mathfrak{G}$ 中所有旋轉使 $\mathfrak{p}_1$ 不变者，它們形成 $\mathfrak{G}$ 的子群 $\mathfrak{g}_1$. 將 $\mathfrak{G}$ 按 $\mathfrak{g}_1$ 分成右剩余类，同一类中的旋轉將 $\mathfrak{p}_1$ 变至同一組 $\mathfrak{p}_i$，且所有各組 $\mathfrak{p}_i$ 中的极点均互相共軛，故对每一 $\mathfrak{p}_i$ 必有 $\mathfrak{G}$ 中旋轉使 $\mathfrak{p}_1$ 变至 $\mathfrak{p}_i$. 所以 $\mathfrak{G}$ 被分为 5 个右剩余类：

$$\mathfrak{G}=\{\alpha_1\mathfrak{g}_1, \alpha_2\mathfrak{g}_1, \alpha_3\mathfrak{g}_1, \alpha_4\mathfrak{g}_1, \alpha_5\mathfrak{g}_1\} \quad (\alpha_1=\boldsymbol{I}),$$

因 $\mathfrak{G}$ 有 60 个旋轉，故每一剩余类，因之 $\mathfrak{g}_1$ 含 12 个旋轉。

$\mathfrak{g}_1$ 为一 12 元的有限旋轉群，且它不能为 I 或 II_a，卽 Z_{12} 或 D_{12} 的样子，因 $\mathfrak{G}$ 中因此 $\mathfrak{g}_1$ 中无 12 回极亦无 6 回极，故 $\mathfrak{g}_1$ 必为 II_b 的样子，或四面体群，卽

$$\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{A}_4.$$

与 II_c 的情形相仿，我們將証明 **$\mathfrak{G}$ 中任一元 α 如使** $(\mathfrak{p}_1)$, …, $(\mathfrak{p}_5)$ **都不变，則必 $\alpha=\boldsymbol{I}$.**

設 α 使上述 5 組均不变，当然 $\alpha\in\mathfrak{g}_1$，故若 $\alpha\neq\boldsymbol{I}$ 則必为两級或三級的。α 不能为两級的，因若 $\alpha^2=\boldsymbol{I}$，而 α 使每一 $\mathfrak{p}_i$ 不变，故

由性质 4，α 的极将在每一 $\mathfrak{p}_i$ 中，不可能。今設 α 为三級的，因若 $\alpha^3=\boldsymbol{1}$，且因 $\mathfrak{G}$ 中只有 1 个 n_2 等于 3．所以任一三級旋轉 β 的极 Q 必与 α 的一极 P 共軛，卽有一 τ 存在，使 $\tau P=Q$．但由(3)知

$$\mathfrak{g}_Q=\tau\mathfrak{g}_P\tau^{-1}.$$

此处 $\mathfrak{g}_Q=\{\boldsymbol{1},\beta,\beta^2\}$，$\mathfrak{g}_P=\{\boldsymbol{1},\alpha,\alpha^2\}$．故 β 为 $\tau\alpha\tau^{-1}$ 或 $\tau\alpha^2\tau^{-1}$．注意 α 及 β 皆使每一 $\mathfrak{p}_i$ 不变，当然亦使 $\tau^{-1}\mathfrak{p}_i$ 不变，故

$$\beta\mathfrak{p}_i=\tau\alpha^k\tau^{-1}\mathfrak{p}_i=\tau\tau^{-1}\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}_i\quad(k=1,2),$$

卽 β 亦使每一 $\mathfrak{p}_i$ 不变，故所有 $\mathfrak{G}$ 中三級旋轉皆使每一 $\mathfrak{p}_i$ 不变，因之所有三級旋轉皆在 $\mathfrak{g}_1$ 中。但因 $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{A}_4$ 仅有 8 个三級元，而 $\mathfrak{G}$ 中已知有 $N/n_2=20$ 个 3 回极；这是矛盾的，不可。所以必定

$$\alpha=\boldsymbol{1}.$$

与前面一样，由上述結果可推得：$\mathfrak{G}$ 中不同的旋轉对应于不同的 $\{\mathfrak{p}_i\}$ 上的置换。

$\mathfrak{G}$ 中决无旋轉对应于如 $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4)(\mathfrak{p}_5)$ 或如 $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3)(\mathfrak{p}_4\mathfrak{p}_5)$ 型的置换，因 $\mathfrak{G}$ 中无 4 或 6 回极。

$\mathfrak{G}$ 中亦不能有旋轉 α 对应于如 $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)(\mathfrak{p}_3)(\mathfrak{p}_4)(\mathfrak{p}_5)$ 型的置换。因为如此，則 α^2 使每一 $\mathfrak{p}_i$ 不动，故为 $\boldsymbol{1}$．因此 α 为一两級旋轉而使 $\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$，$\mathfrak{p}_5$ 皆不动，按性质 4．α 的极必在此三組的每一組內，不可能。

所以 $\mathfrak{G}$ 中的旋轉皆对应于 $\mathfrak{S}_5$ 中的交代群 $\mathfrak{A}_5$．而 $\mathfrak{G}$ 及 $\mathfrak{A}_5$ 各为 60 个元，故

$$\mathfrak{G}\cong\mathfrak{A}_5.$$

这种 G 称作(十二面或)二十面体群。

据上所述，有限旋轉群仅可能有上列各形式，但是否每种形式的群确有存在，尚須証明。实际上，可用几何方法做出上属各群，卽各群都眞实存在，故本問題获完全解决。

首先，如 I 型的循环群 Z_N 非常容易做成。任取一对直徑对頂

点为极，作 σ 使 $\varphi_\sigma=2\pi/N$，則由 σ 所生成的卽为 Z_N。

其次，对于最后三型的群恰可分别作球的內接正四面体、正八面体及正二十面体，而使此諸正多面体不变的旋轉所成的群恰分别为此諸群。每一情形下 $\mathfrak{P}_3$ 中的极卽正多面体的頂点，每一正多面体的每一面的中心形成对偶正多面体的頂点（見图 1）。如以 O 点为中心将此諸点射影到球面 $\mathfrak{K}$ 上，則成为 $\mathfrak{P}_2$ 中的极。如以 O 点为中心将多面体的每一棱的中点射影到球面上就成为 $\mathfrak{P}_3$ 中的极。每使一正多面体不变的群亦使其对偶正多面体不变。

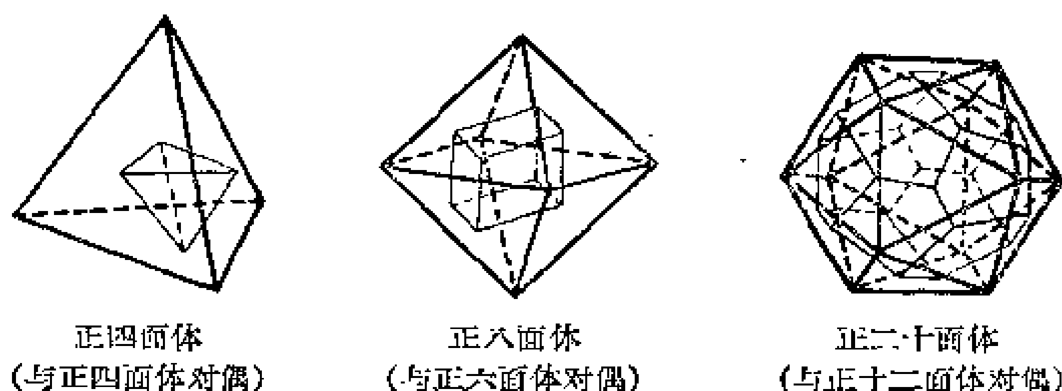


图 1

如图 2 中，二十面体的六个作了記号的棱的中点就与 Π_3 中的一組 $\mathfrak{p}$ 相似，使这六点不变的群为一四面体群，且它們都是 2 回极，故組成一正四面体的六个棱的中点，亦卽一正八面体的六个頂点。

注意正四面体仍与正四面体对偶，与正八面体对偶的为正六面体（正立方体）。如研究使正六面体不变的旋轉群，則与它对偶的又为正八面体，故 Π_c 亦可称为正六面体群。同理正十二面体与正二十面体对偶，故 Π_d 亦可称为正十二面体群。

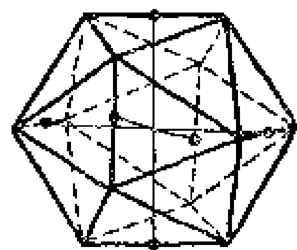


图 2

最后談到 Π_a 的情形，例如設 $N=6$，如图 3，設 $\triangle ABC$ 为 $\mathfrak{K}$ 上赤道圓的內接正三角形，将此三角形看成"两面体"，A, B, C 为

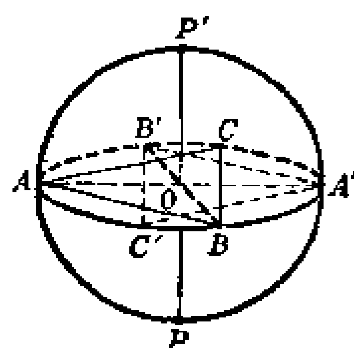


图　3

$\mathfrak{P}_2$ 中的极点，自 O 作此二重面的垂綫，将 $\mathfrak{K}$ 上南北极点 P, P' 为 $\mathfrak{P}_3$ 中的极点，自 O 点与 $\triangle ABC$ 各边中点相联，延长得 $\mathfrak{P}_2$ 中的三个极点 A', B', C'. 赤道圓上的极点都是 2 回极，P, P' 为 3 回极。每一旋轉均使 $\triangle ABC$（即正两面体）不变，故 D_6 的确存在，并且不妨称它为两面体群。一般，只要 N 是 $\geqslant 4$ 的偶数，以同法可証 D_N 都存在。事实上，D_N 使赤道圓上一正 $N/2$ 边形（$N=4$ 时任一直徑）不变。

至此我們对于 3 維 Euclid 空間的有限旋轉群的种类与构造可完全认識了，它或为由 $\mathfrak{K}$ 上以一直徑为軸的旋轉 $\sigma\left(\sigma_\varphi=\frac{2\pi}{N}\right)$ 所生成（Z_N），或它的旋轉使一大圓的內接正 $\frac{N}{2}$ 边形（$N=4$ 时为一直徑）不变（D_N），或使一內接正多面体不变；再不然就只含有不动旋轉 I。